

١٢



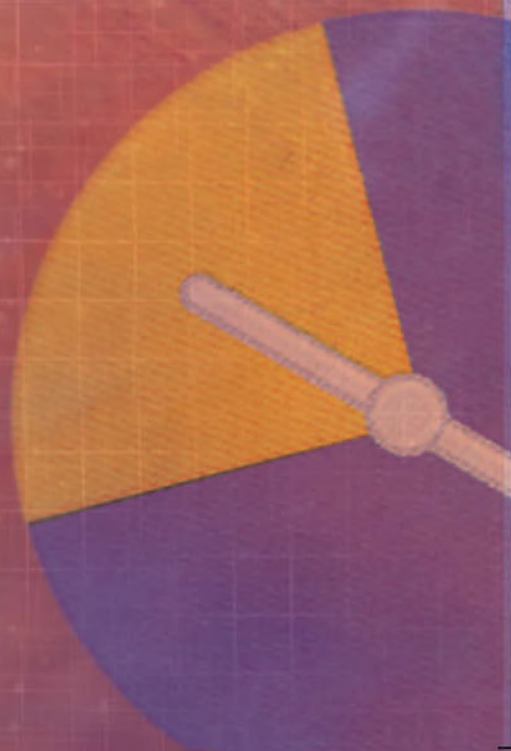
حکومتی هه‌ریکی کوردستان - عێراق  
وهزارهتی به‌ره‌رده - به‌ریوه‌به‌رایه‌تی گشتی پرۆگرام و چاپه‌مه‌نیه‌کان

# بیرکاری بو هه‌مووان

کتیبه‌ی خویندکار  
پۆلی دوازه‌هه‌می ویژیه‌ی



چاپی شه‌شه‌م  
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ کوردی / ١٤٣٦ ک



سہرپہرشتی ہونہری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ناری محسن احمد

## 1 به‌شی 1 ئامار و ئه‌گهر Statistics And Probability

- 1 پروونکردنه‌وه‌ی سمپلی
- 2 ..... Box-and-Whisker Plot
- 2 ئه‌گهری مه‌رجی و ئه‌گهری گشتگر
- 8 ..... Conditional and Total Probabilities
- 16 ..... Linear Models نموونه هیللیه‌کان

## 2 به‌شی 2 جهر Algebra

- 1 شیکارکردنی سیستمه هیللیه‌کان به سی نه‌زانراو
- 28 ..... Solving Linear systems in 3 unknowns
- 34 ..... Linear Programming پروگرامی هیللی
- 40 ..... Multiplying Matrices لیکدانی ریزکراوه‌کان
- 46 ..... Inverse of a matrix هه‌لگه‌پاوه‌ی ریزکراوه‌کان

## 3 به‌شی 3 نه‌خشه‌کان Functions

- 1 نه‌خشه‌ی راده‌داره‌کان
- 25 ..... Polynomial Functions
- 58 ..... Variation Functions نه‌خشه‌ی گوپان
- 64 ..... Exponential Functions نه‌خشه‌ی توانی
- 70 ..... Logarithmic Functions نه‌خشه‌ی لوگاریتمیه‌کان

## 77 Sequences

### یہ کہ بہ دوای یہ کہ کان

4

بہ شی

- 1 یہ کہ بہ دوای یہ کہ ژمارہ بیہ کان  
78 ..... Arithmetic Sequences
- 2 یہ کہ بہ دوای یہ کہ ئہ اندازہ بی  
85 ..... Geometric Sequences

## 91

### جیاکاری و تہ واکاری Differentiation and Integration

5

بہ شی

- 1 جیبہ جیکردنہ کانی جیاکاری لہ ئابووریدا  
92 ..... Applications of Differentiation to Economics
- 2 تہ واکاری Integration  
100 .....



# ئامار و ئەگەر

## Statistics and Probability

بەشی

1

وانەکان

1. پەرتیوون بە  
پوونکردنەویدی.
2. ئەگەری مەرجی  
و ئەگەری سەرچەم.
3. نموونە هێلییهکان.





# پوونکردنه‌وه‌ی سمیّلی

## Box-and-Whisker Plot



بۆچی؟

ده‌توانیت پوونکردنه‌وه‌ی سمیّلی بۆ به‌راوردکردنی په‌رتبونی پیدراوه‌کان له دوو کۆمه‌له‌ی پیدراوی لی‌کچوو به‌کاربه‌ینین وک ناوه‌پاسته‌ی مانگانه‌ی پله‌ی گه‌رما.

### چه‌مکی په‌رتبوون

ناوه‌پاسته‌ی پله‌کانی گه‌رما بۆ شارێ سولاڤ	کانوونی دووهم
23.32	کانوونی دووهم
23.77	شوبات
25.8	ئادار
28.08	نیسان
30.51	ئایار
31.25	حوزه‌پیران
32.7	تمووز
32.25	ئاب
31.27	ئەیلول
30.1	تشرینی یه‌که‌م
28.2	تشرینی دووهم
24.9	کانوونی یه‌که‌م

ناوه‌پاسته‌ی پله‌کانی گه‌رما بۆ شارێ سه‌رجنار	کانوونی دووهم
16.63	کانوونی دووهم
17.8	شوبات
22.94	ئادار
26.37	نیسان
32.61	ئایار
35.62	حوزه‌پیران
37.06	تمووز
36.81	ئاب
33.06	ئەیلول
28.34	تشرینی یه‌که‌م
22.5	تشرینی دووهم
14.35	کانوونی یه‌که‌م

له دوو خشته‌ی به‌رامبه‌ر ناوه‌پاسته‌کانی پله‌ی گه‌رما له‌ماوه‌ی 12 مانگ بۆ هه‌ردوو هاوینه‌هه‌واری سه‌رجنار له‌ سلیمانی و سولاڤ له ده‌ۆک دهرده‌که‌وێت. ناوه‌پاسته‌ی به‌هایه‌کانی خشته‌ی یه‌که‌م ده‌کاته 27.355 و ناوه‌پاسته‌ی به‌هایه‌کانی خشته‌ی دووهم ده‌کاته 28.51 ئەگه‌ر به‌هایه‌کانی ئەم دوو خشته‌ له‌سه‌ر ته‌وه‌ری ژماره‌کان بنوویێن ئەوا ده‌بینین:



تێبینیه‌که‌ ناوه‌پاسته‌ی خشته‌ی دووهم 28.51 به‌شێوه‌یه‌کی باشت‌ر کۆمه‌له‌ به‌هایه‌کانی دهرده‌برێت له‌ ناوه‌پاسته‌ی یه‌که‌م، چونکه‌ زۆربه‌ی به‌هایه‌کانی خشته‌ی دووهم له‌ ناوه‌پاسته‌ نزیکن له‌ وکاته‌ی زۆربه‌ی به‌هایه‌کانی خشته‌ی یه‌که‌م دوورن له‌ ناوه‌پاسته‌که‌ی، بۆیه‌ ده‌توانین ب‌لێین که‌ به‌هایه‌کانی خشته‌ی یه‌که‌م زیاتر په‌رتترن له‌ به‌هایه‌کانی خشته‌ی دووهم.

### نامانجه‌کان

- چواریه‌کی یه‌که‌م و چواریه‌کی سێهه‌م بۆ کۆمه‌له‌ پیدراویک ده‌دۆزێته‌وه‌.
- مه‌ودا و مه‌ودای چواریه‌کی بۆ کۆمه‌له‌ پیدراوه‌کانی چواریه‌کی یه‌که‌م و چواریه‌کی سێهه‌م هه‌ژمارده‌کات.
- پوونکردنه‌وه‌ی سمیّلی بۆ نواندنی په‌رتبونی کۆمه‌له‌ پیدراویک ده‌کیشێت.

### ژاراوه‌کان Vocabulary

- چواریه‌کی یه‌که‌م  
First quartile
- چواریه‌کی دووهم  
Third quartile
- مه‌ودای چواریه‌کی  
Interquartile range
- پوونکردنه‌وه‌ی سمیّلی  
Box-and- Whisker-Plot

ئامارناسان پېۋانەكان و ئامپىرە پروونكىردنەۋەكانى كە زۆر وردن بەكاردەھيئن بۇ دەرپىنى پەرتىۋونى كۆمەلە پېدراۋەكان. لە پۇلى يازدەدا فېربوۋىت چۆن ھەندىك لە پېۋەرەكانى پەرتىۋون ھەژمار بىكەيت و بەكارىانبھيئەت ۋەك مەۋدا و لېكنەچوون و لادانى پېۋانەيى. لەم وانەدا فېردەبىت چۆن بەھايەكانى دىكە ھەژماربىكەيت و بەكارىانبھيئەت لەگەل نواندىنى پەرتىۋون بە پروونكىردنەۋەيى.

### چالاقى

#### دۆزىنەۋەي چوارىيەكەكان

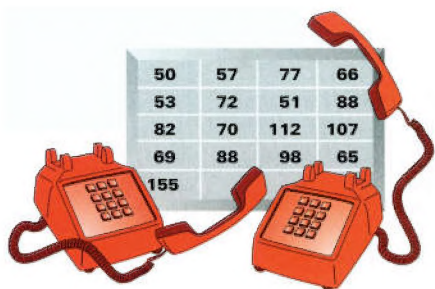
لە خىشتەي خوارەۋە تېكراكانى مانگانەي باران بارىن دەرەكەۋىت (بە مىلىتېر) لەيەكەك لە شارەكان لەماۋەي 12 مانگدا.

مانگ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
تېكرا	48	57	71	89	124	76	58	56	86	89	58	46

1. ناۋەرپاستەي ئەۋ تېكراپانە بدۆزەۋە، پېژەي سەدى پېدراۋەكان كە لە ناۋەرپاستە كەمترن چەندە؟ پېژەي سەدى پېدراۋەكان كە لە ناۋەرپاستە زياترن چەندە؟
  2. ناۋەرپاستەي ئەۋ كۆمەلەيە بدۆزەۋە كە لە تېكراپەكانى كەمترە لە ناۋەرپاستە، پېژەي سەدى ئەۋ تېكراپانەي كە لە ناۋەرپاستە كەمترن بدۆزەۋە؟
  3. ناۋەرپاستەي ئەۋ كۆمەلەيە بدۆزەۋە كە لە تېكراپەكانى زياترە لە ناۋەرپاستە، پېژەي سەدى ئەۋ تېكراپانەي كە لە ناۋەرپاستە زياترن بدۆزەۋە؟
- دەتوانىت ئەۋەي لە چالاقىيەكەي پېشۋو ئەنجامتدا ۋەك خوارەۋە بىنويئەت.



ئامارناساكان بە ناۋەرپاستەي نىۋەي بىچوۋكترىن دەلېن چوارىيەكى يەكەم و بە  $Q_1$  ھىماي دەكەن و بە ناۋەرپاستەي نىۋەي گەرەتەين دەلېن چوارىيەكى سېيەم و بە  $Q_3$  ھىماي دەكەن، بەلام چوارىيەكى دوۋەم  $Q_2$  تەنھا ناۋەرپاستە ۋە ھەرۋەھا ئامارناسان بە  $Q_3 - Q_1$  دەلېن مەۋداي چوارىيەكى و بە  $IQR$  ھىما دەكەن و ھەر بەھايەك لە كۆمەلە پېدراۋەكان كەمترىت لە  $Q_1 - 1.5 \times IQR$  يان زياتر بىت لە  $Q_3 + 1.5 \times IQR$  پېي دەلېن بەھاي پەپرگەر (قىمە متطرفە).



لە وېنەي بەرامبەر ژمارەي ئەۋ تەلەفۇنانە دەرەكەۋىت كە مەلۇبەندى ئاگر كۆزىنەۋەي شارى دھۆك لەماۋەي 17 پۇژدا ۋەرىگرتوون، بەشۋەيەكى ھەرەمەكى ھەلپىزىدراۋن.

- ا. گەرەتەين بەھا بىچوۋكترىن بەھا ناۋەرپاستە و چوارىيە يەكەم و سېيەم و لەگەل مەۋدا و مەۋداي چوارىيەكى بۇ كۆمەلەي بەھايەكان لە وېنەي بەرامبەر بدۆزەۋە.
- ب. بەھا پەپرگەكان، ئەگەر ھەبۋو لە كۆمەلەكەدا بدۆزەۋە.

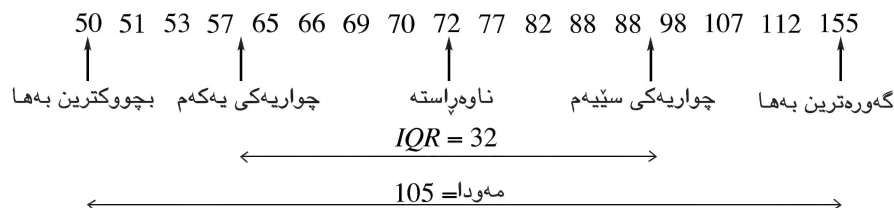
شىكار

ا. سەرەتا بەھايەكان بەرەۋ ژوور رىزىكە:

50 51 53 57 65 66 69 70 72 77 82 88 88 98 107 112 155

ژماره‌ی پیدراوه‌کا ده‌کاته 17، که ژماره‌یه‌کی تاکه ئەمەش واده‌کات ناوه‌پراسته بکاته به‌های نو‌یه‌م واتە  $Q_2 = 72$ ، چواریه‌کی یه‌که‌م ده‌کاته ناوه‌پراسته‌ی کۆمه‌له‌ پیدراوه‌کانی 57، 65، 66، 69، 70، 51، 53 له‌به‌رئه‌وه‌ی ژماره‌ی ئەو پیدراوانه جووته (8) ئەوا ناوه‌پراسته‌ی نیوه‌ی بچووکت‌ترین ده‌کاته ناوه‌پراسته‌ی ئەو دوو به‌هایه‌ی ده‌که‌ونه ناوه‌ند واتە 57 و 65 که‌واتە،  $Q_1 = \frac{57+65}{2} = 61$  له‌لایه‌کی تر پیدراوه‌کانی نیوه‌ی گه‌وره‌ترین ده‌کاته 107، 98، 88، 88، 82، 77، 155، 112. ئەوانیش ژماره‌یان جووته (8) و ناوه‌پراسته‌ی ئەو کۆمه‌له‌یه ده‌کاته ناوه‌پراسته‌ی ئەو دوو به‌هایه‌ی ده‌که‌ونه ناوه‌ند واتە 88 و 98 که‌واتە،  $Q_3 = \frac{88+98}{2} = 93$ .

گه‌وره‌ترین به‌ها ده‌کاته 155 و بچووکت‌ترین به‌ها ده‌کاته 50 مه‌ودا ده‌کاته  $155 - 50 = 105$  و مه‌وداکه‌ی چواریه‌کی ده‌کاته  $93 - 61 = 32$  ده‌توانیت ئەوه‌ی پێگه‌یشتی به‌م شێوه‌یه پوخت‌که‌یه‌وه.



**ب** بۆ دۆزینه‌وه‌ی به‌های په‌رگر، ده‌ست‌به‌که به‌هه‌ژمارکردنی هه‌ریه‌ک له  $Q_1 - 1.5 \times IQR$  و  $Q_3 + 1.5 \times IQR$ .

$$Q_3 + 1.5 \times IQR = 93 + 1.5 \times 32 = 141 \text{ و } Q_1 - 1.5 \times IQR = 61 - 1.5 \times 32 = 13$$

به‌هایه‌ک نییه‌ که‌مه‌تر بێت له 13، له‌کاتێکدا یه‌ک به‌ها هه‌یه (155) گه‌وره‌تر بێت له 141، ئەمەش ئەوه ده‌گه‌ینێت یه‌ک به‌های په‌رگر هه‌یه ئەویش ده‌کاته 155.

گه‌وره‌ترین به‌ها و بچووکت‌ترین به‌ها و ناوه‌پراسته و چواریه‌کی یه‌که‌م و سێیه‌م و له‌گه‌ڵ مه‌ودا و مه‌ودای چواریه‌کی بۆ کۆمه‌له‌ی به‌هایه‌کانی خشته‌ی خواره‌وه بدۆزه‌وه، به‌ها په‌رگره‌کان بدۆزه‌وه.

50	31	34	24	37	35	2	34	31	9	7	4
83	78	69	60	57	52	13	8	2	36	33	11

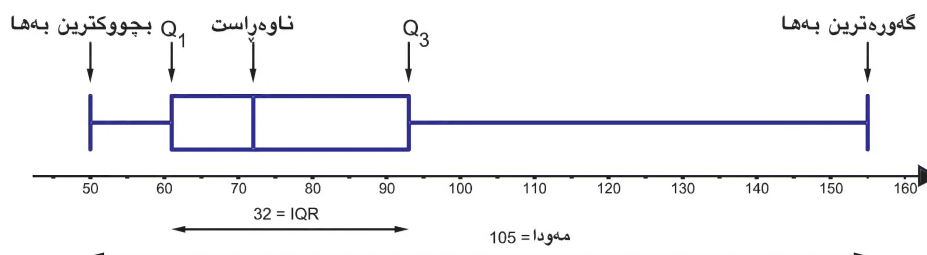
ئایا ده‌توانیت بوونی به‌های په‌رگر له نمونه‌ی 1 لێک‌به‌یه‌وه؟

هه‌ول‌به‌

بیرکردنه‌وه‌ی په‌خه‌گرانه

### پونکردنه‌وه‌ی سمی‌لی

پونکردنه‌وه‌ی سمی‌لی وێنه‌یه‌کی پونکردنه‌وه‌یه‌یه‌ چۆنیه‌تی په‌رت‌بوونی به‌هایه‌کان له کۆمه‌له‌ پیدراوه‌کان ده‌ده‌خات، ئەمه‌ی خواره‌وه پونکردنه‌وه‌ی سمی‌لییه‌ بۆ کۆمه‌له‌ پیدراوه‌کانی نمونه‌ی 1.



سه‌رنج‌به‌ که‌ پونکردنه‌وه‌ی سمی‌لی به‌ پێنج به‌های ئاماری دیاریده‌ک‌رێت: گه‌وره‌ترین به‌ها و بچووکت‌ترین به‌ها و ناوه‌پراسته و چواریه‌کی یه‌که‌م و چواریه‌کی سێیه‌م.



### ههنگاوکانی دروستکردنی پروونکردنه وهی سمیللی

- 1 ههنگاوی پیزکردنی بههاکان بهرهوژوور و ههژمارکردنی ناوهراسته و چواریهکی یهکه م و چواریهکی سییه م.
- 2 ههنگاوی کیشانی تهوهری ژمارهکان که دوو بههای گه ورهترین و بچووکتترین تیدا دیاری کرابیت.
- 3 ههنگاوی کیشانی لاکیشهیه که له بههای  $Q_1$  بو بههای  $Q_3$  دریزده بیتته وه.
- 4 ههنگاوی کیشانی هیلیکی ئهستوون له بههای ناوهراسته دا که دهکه ویتته لاکیشهیه وه.
- 5 ههنگاوی کیشانی پارچه راسته هیلیکی ئاسویی له  $Q_1$  دریزده بیتته وه ههتا بچووکتترین بهها و پارچه راسته هیلیکی ئهستوون له بچووکتترین بهها، پاشان کیشانی پارچه راسته هیلیکی ئاسویی له  $Q_3$  دریزده بیتته وه ههتا گه ورهترین بهها و پارچه راسته هیلیکی ئهستوون له گه ورهترین بهها.

## نموونه

2

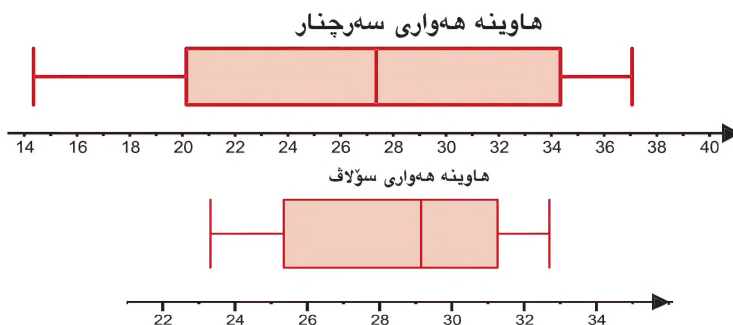
به گه پانه وه بو نمونه که ی سهرهتای وانه که، پروونکردنه وهی سمیللی بو تیکرپای پلهکانی گهرما بو ههریه که له ههر دوو هاوینه هه واری سهرچنار و سولا ف بکیشه، پاشان به بهکارهینانی دوو پروونکردنه وه سمیللی که و بهراورد له نیوان دوو کومه له که بکه.

سهرچنار	سولا ف	بچووکتترین بهها
14.35	23.32	چواریهکی یهکه م
20.15	25.35	ناوهراسته
27.36	29.15	چواریهکی سییه م
34.34	31.26	گه ورهترین بهها
37.06	32.70	

شیکار

سهرهتا پینچ بهها له ههر کومه له یه که ههژماریه که ئه و ئه نجامانه ی خواره ووت دهستده که ویت:

پاشان پروونکردنه وهی سمیللی بو ههر کومه له یه که بکیشه.



دریزبوونه وهی لاکیشهیه که و سمیللهکانه پروونکردنه وهی سهرچناردا ئه وه دهردهخات که پلهکانی گهرما له هاوینه هه واری سهرچنار زیاتر گوپانی به سهردادیت وه که له پلهکانی گهرما له هاوینه هه واری سولا ف چونکه لاکیشهیه که و دوو سمیلله که که متر دریزبوونه ته وه. به بهراوردکردنی نیوان دوو پروونکردنه وهکان ئه وه دهردهخات که که مترترین تیکرپای پلهکانی گهرما له هاوینه هه واری سولا ف بهرتره له که مترترین تیکرپای گوپانی گهرما له هاوینه هه واری سهرچنار، وه بهرترترین تیکرپای گوپانی پلهکانی گهرما له سولا ف که متره له بهرترترین تیکرپای گوپانی گهرما له هاوینه هه واری سهرچنار.

مه وادی چواریهکی تیکرپاکانی پلهکانی گهرمای ههریه که له هاوینه هه واری سهرچنار و سولا ف

بدوزه وه چیت دهستده که ویت له دوو بههایه؟

نایا دهکرتیت پروونکردنه وهی سمیللی ته نه لا سمیللیک بیت؟ بهی سمیل بیت؟ وه لامه که ت پروونبکه وه؟

## بەردەوامبوون لە بیرکاری

1 جیاوازی نیوان دۆزینەوی ناوەرپاستە و چواریەکی یەکەم و سییەم بۆ کۆمەڵەیهک لە 20

بەهاو کۆمەڵەیهک لە 15 بەها پوونبکەوه.

2 پوونکردنەوی سمیڵی چیت بۆ دەرەخات لەبارە کۆمەڵە ئەو پیدراوانە کە دەینوینت؟

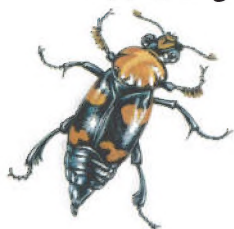
3 دوو کۆمەڵە پیدراو دروستبکە ناوەرپاستە هەریەکییەکان 7 و چواریەکی یەکەم  $Q_1 = 5$  و

چواریەکی سییەم  $Q_3 = 11$  بێت.

## راهیانانی ئاراستە کراو

4 **ژینگە** لە خشتە کە درژییەکانی 24 زیندەوەر (بە ملیمەتر) لە جۆریکی دیاریکراو لە

زیندەوەرەکان دەرەکەوێت.



28	30	38	34	36	31	28	25
32	34	27	29	30	26	33	35
29	38	31	25	29	31	25	37

أ بهای بچووکتترین و بهای گەورەترین و ناوەرپاستە و چواریەکی یەکەم و سییەم و

مەودا و مەودای چواریەکی بۆ ئەو پیدراوانە بدۆزەوه.

ب بەدوای بهای پەرگەر ئەگەر لە کۆمەڵە کەدا هەبوو بگەڕێ و دیاریبکە.

5 **کۆبوونەوه** لە خشتە بەرامبەر پێژە سەدی ئەو ئافەرتانە

کارەکەن لە ژمارەیهک و وڵاتە پیشکەوتووکان بۆ

سالەکانی 1980 و 1992 دەرەکەوێت.

1992	1980	وڵات
42.1	36.4	ئوسترالیا
45.5	39.7	کەنەدا
43.8	39.5	فەرەنسا
42.0	38.0	ئەڵمانیا
40.5	38.4	یابان
48.3	45.2	سوید
44.9	40.4	بەریتانیا
45.7	42.4	وڵاتە یەگرتووەکان

أ ناوەرپاستە و چواریەکی یەکەم و سییەم بۆ

پیدراوەکانی هەریەک لە دوو سالەکە بدۆزەوه.

ب پوونکردنەوی سمیڵی بۆ پیدراوەکانی

هەریەک لە دوو سالەکە بکێشە.

ج بەراورد لە نیوان دوو پوونکردنەوهکە بکە.

## راهیان و جیه جێکردن

بۆ هەر کۆمەڵەیهک بهای بچووکتترین و بهای گەورەترین و ناوەرپاستە و چواریەکی یەکەم و

چواریەکی سییەم و مەودا و مەودای چواریەکی بدۆزەوه، پاشان پوونکردنەوی سمیڵی بۆ

هەریەکییەکان دروستبکە.

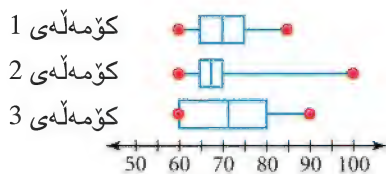
6 42 ، 45 ، 56 ، 48 ، 59 ، 60 ، 51 ، 54 ، 44 ، 51 ، 50 ، 44 ، 42 ، 49 ، 56

7 22 ، 50 ، 78 ، 22 ، 77 ، 93 ، 27 ، 86 ، 14

8 8 ، 2 ، 8 ، 2 ، 3 ، 2 ، 2

3 كۆمەلە خويندكار ھەلسان بە ئەنجامدانی ھەمان تاقىكردنەوھ پرونكردنەوھى سىمىلى بەكاربەھىنە بۆ نمرەكانى ئەو سى كۆمەلە بۆ ولەمدانەوھى پرسىيارەكانى 9 ھەتا 12.

9 كام كۆمەلە بەرزترىن نمرە گەرەكانى ھەبوو؟



10 كام كۆمەلە گەرەترىن مەوداى ھەبوو؟

11 كام كۆمەلە گەرەترىن ناوەرپاستەى ھەبوو؟

12 كام كۆمەلە گەرەترىن مەوداى چوارىيەكى ھەبوو؟

13 خشتەى خوارمە درېژىيەكانى 24 زىندەوهر لە جۆرىكى دىارىكراو لە زىندەوهرەكان بە سانتىمەتر پروندەكاتەوھ.

3.0	2.6	3.3	3.5	2.8	3.0	3.8	3.4	3.6	3.1	2.8	2.5
2.9	3.8	3.1	2.5	2.9	3.1	2.5	3.7	3.2	3.4	2.7	2.9

أ بهای بچوكترىن و بهای گەرەترىن و ناوەرپاستە و چوارىيەكى يەكەم و چوارىيەكى سىيەم و مەوداى چوارىيەكى ئەو پىدراوانە بدۆزەوھ.

ب ئايا ئەو كۆمەلە بەھا پەرگەرەكان لەخۆدەگرىت؟ ئەگەر ولەلامەكە بەلئىيە ئەو بەھايانە چىين؟

## رواين بۆ دواوھ

14 ناوەرپاستە و و باو لە ئەم پىدراوانە بدۆزەوھ. 15, 9, 19, 13, 19, 17, 8, 14, 11, 4, 16, 2, 17, 13, 8.

15 مەودا و لادانى پىوانەى بۆ ئەم پىدراوانە بدۆزەوھ. 13, 98, 16, 21, 45, 96, 11, 73, 12.

## رواين بۆ پىشەوھ

16 شىرىن لە پۆلى يازدە داىە و خوشكەكەشى شلىر لە پۆلى دوازدە داىە، لەھەر پۆلىك بۆ دىارىكردن ئۆينەر ھەلېژاردن ئەنجامدرا ئەگەرى ھەلېژاردنى شلىر و خوشكەكەى شىرىن چەندە ئەگەر بزائىت لە پۆلى يازدەدا 30 خويندكار و لەپۆلى دوازدەدا 25 خويندكار ھەيە؟

### لەبىرت بىت

ئەگەر ھەرىكە لە  $A$  و  $B$  دوو پروداوين لە تاقىكردنەوھەيەكى ھەرمەكى دا ئەوا  $A$  ,  $B$  دوو پروداوى جيانەبن كاتىك  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  و  
 $P(A \cap B) = 0$   
 ئەگەر  $A$  ,  $B$  جيانەبن  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$



# ئەگەرى مەرجى و ئەگەرى سەرجهم

## Conditional and Total Probabilities



بۇچى شېكەرەۋە رامبارىيەكان دەتوانن  
بىشت بېيەستىن بە پىدراۋ دىمۇگرافىيەكان  
و ئەگەرەكان بۇ پىشېبىنىكىردى  
نەجامەكانى ھەلپزاردىن

### ئەگەرى مەرجى

لە زۆربەى تاقىكىردنەۋە ھەپمەككىيەكان پىۋىستت بە دىارىكىردى ئەگەرى پووداۋى  $A$  دەبىت  
لەكاتىكىدا پووداۋى  $B$  ھانتۆتەدى ۋەك ئەۋەى بزانىت ئەگەرى ئەۋەى كەسىك ھەپمەكى  
ھەلپزىرداۋىت و دەنگى بە لىستى 725 دابىت ئەگەر بزانىت ئەۋەى لە پارىزگای سولەيمانىيە، بۇيە  
ئەگەر  $B$  پووداۋى ((كەسى ھەلپزىرداۋىت لە سلیمانى)) و  $A$  ((كەسىك بىت دەنگى بە لىستى 725  
دابىت))، ئەۋەى لەبۋارى بىركارىيدا كاردەكەن نووسىنى  $P(A/B)$  بەكاردەھىنن بۇ دەرپرېنى  
ھاتنەدى  $A$  ئەگەر بزانىت  $B$  پووداۋىت و بەۋ ئەگەرە دەلېن ئەگەرى مەرجى.

### پىناسەى ئەگەرى مەرجى

با  $B$  ھەر پووداۋىكى ھەرمەكى بىت لە بۇشايى نمونەى  $S$  دا پوودەدات. كاتىك  $P(B) \neq 0$ .  
ئەگەرى ئەۋەى پووداۋىك ۋەك  $A$  پوودەدات بۇ يەكەمجار بەمەرجى  $B$  پووداۋىت.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ھىماى  $P(A/B)$  بەم شىۋەيە دەخویندريتەۋە: ئەگەرى پوودانى  $A$  ئەگەر  $B$  پووداۋىت.

### ئامانجەكان

- ئەگەرى پووداۋىك دەۋزىتەۋە بەزانىنى ئەۋەى كە پووداۋىكى تر ھانتۆتەدى.
- مەرجى سەربەخۇيى دوو پووداۋ دىارىدەكات و بەكارىدەھىنن.
- ياساى ئەگەرى سەرجهم دىاردەكات و بەكارىدەھىنن.

### زاراۋەكان

#### Vocabulary

- ئەگەرى مەرجى
- Conditional probability
- پووداۋە سەربەخۇيەكان
- Independent events
- ئەگەرى سەرجهم
- Total Probability

### نمونە

توورەگەيەك 10 گۆى سوورى تىدايە لە 1 ھەتا 10 پەنووسىراۋن، و 5 گۆى شىن بە ژمارە  
تاكەكان لە 1 ھەتا 9 پەنووسىراۋن. گۆيەك لە توورەگەكە پاكىشرا ئەگەرى ئەۋەى گۆيەكە بە  
ژمارە 9 پەنووسىراۋىت و سووربىت بدۆزەۋە.

شېكار

بۇشايى ئەگەرەكان لەكاتى پاكىشانى گۆى يەكەم برىتییە لە:

{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9, 7, 5, 3, 1}

پووداۋى  $B$  برىتییە لە ((گۆى سوور)) واتە {10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}.

پووداۋى  $A$  برىتییە لە ((گۆيەكە بە ژمارە 9 پەنووسىراۋىت)) واتە {9, 9}.

بەلام پووداۋى  $A \cap B$  برىتییە لە {9}.



لهوهی پېښو دهردهچېټ  $P(B) = \frac{10}{15}$  و  $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$  لهمهش  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{10}{15}} = \frac{1}{10}$  كهواته، ئهگهري ئهوهی گوځيهكه رهنووسی 9 هه لگرتبېټ ئهگهري زانیت سووره دهكاته  $P(A/B) = \frac{1}{10}$ . پټوښته سهرنجی ئهوه بدهیت كه مهرجی سووربوونی گوځيه پاكښراوهكه بوښایی ئهگهريكانی گوځيوبووه.

{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}

و پرووداوی A بوو به ((پاكښانی گوځيهكه به 9 رهنووسكرابېټ)) له توورمهگهيهكه 10 گوځي تېدايېټ به 1 ههتا 10 رهنووسكراوی تېدايه ئهمهش وادهكات پروودانی پرووداوی A كاتېك B ئهگهري هه لېژاردنی گوځيهكه بېټ به 9 رهنووسكرابېټ له نيوان 10 گوځي رهنووسكراو به 1 ههتا 10، واته  $\frac{1}{10}$ .

گوځيهكه له توورمهگهيهكه پاكښرا 10 گوځي سووری تېدايه به 1 ههتا 10 رهنووسكراوه و 5 گوځي شين به ژماره تاكهكانی له 1 ههتا 9 رهنووسكراوه. ئهگهري ئهوهی گوځيه پاكښراوهكه به ژماره 3 رهنووسكرابېټ بدوژهوه، ئهگهري زانیت گوځيهكه شينه؟

ههولېده

پاريزگا	پالېوراوی 1	پالېوراوی 2	نهوانی ديكه
1	581	472	5
2	345	336	4
3	349	207	3
4	260	210	3
5	148	197	5

له خشتهی بهرامبهر دهنگهكان (به ههزاران) دابه شدهكريټ به سهر 5 پاريزگاری يهكيك له ولاتهكان كه هه لېژاردنی سهرؤكايهتي تېدا ئهجامدهدرېټ كاتېك پالېوراوی 1 و پالېوراوی 2 دوو پالېوراوی سهرهكي بن.

2

نمونـه

أ ئهگهري ئهوهی دهنگدهريك دهنگی بو پالېوراوی 1 دابېټ بدوژهوه، ئهگهري بزانيت ئهوه دهنگدهره له پاريزگای 3 يه؟

ب ئهگهري ئهوهی دهنگدهريك له پاريزگای 2 بېټ و دهنگی بو پالېوراوی 2 دابېټ بدوژهوه؟

شيكار

أ ئهگهري A پرووداوی ((دهنگي به پالېوراوی 1 دابېټ)) و B ((دهنگهريكه له پاريزگای 3 دابېټ)) ئهوا داواكراو بريتييه له دوژينهوهی ئهگهري پرووداوی  $P(A/B) = \frac{349}{559} \approx 0.624$ . A ئهگهري B پروودات.

ب ئهگهري A پرووداوی ((دهنگهريكه له پاريزگای 2 بېټ)) و B ((دهنگي به پالېوراوی 2 دابېټ)) ئهوا داواكراو بريتييه له دوژينهوهی ئهگهري هاتندهی پرووداوی  $A \cap B$ .

$$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$$

$$P(B) = \frac{1422}{3125} \quad P(A/B) = \frac{336}{1422} \quad \text{به لام كهواته،}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1422}{3125} \times \frac{336}{1422} \approx 0.108$$

أ ئهگهري ئهوهی دهنگدهريك له پاريزگای 5 بېټ لهوانهيه پالېوراویكي هه لېژاردبېټ له پالېوراوه سهرهكييهكان نه بېټ بدوژهوه.

ههولېده

ب ئهگهري ئهوهی دهنگدهريك له پاريزگای 1 بېټ و دهنگی به پالېوراوی 1 دابېټ بدوژهوه.

## پوډاوه سهرېخوځيكان

### پېنځاسه د دوو پوډاوي سهرېخوځي

به دوو پوډاوي  $A$  و  $B$  له تافيكردنه وپه يه كې هره يوه كې دوتريت دوو پوډاوي سهرېخوځي ټه گهر ټه گهر پوډاوي يه كيكيان كارنه كاته سهر پوډاوي يان پوډه داني ټه وي تريان، واتا ټه گهر

$$P(A/B) = P(A) \text{ و } P(B/A) = P(B)$$

ټه گهر دوو بهر ده زارت هه لدا، يه كيكيان سوور و ټه و تريان زهره، ټه و ټه گهر پوډاوي  $A$  ((دهر كه و تني ژماره يه كې جووت له سهر بهر ده زاره سوور كه)) كارنا كاته سهر پوډاوي پوډاوي  $B$  ((دهر كه و تني ژماره يه كې جووت له سهر بهر ده زاره شينه كه)) يان پوډه داني، ټه م دوو پوډاوه سهرېخوځي.

ټه گهر پوډاوي  $A$  و  $B$  سهرېخوځي، ټه و  $P(A/B) = P(A)$  به م ش

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ يان } P(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### مهرجي سهرېخوځيوني دوو پوډاوه

دوو پوډاوي  $A$  و  $B$  له تافيكردنه وپه يه كې هره يوه كې دېنه دوو پوډاوي سهرېخوځي ټه گهر

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

## نمونې

ټه گهر بگه پېته وه بې تافيكردنه وپه يه لدا داني دوو بهر ده زار به هره يوه كې سوور و شين، ټه گهر ټه و ټه دوو ژماره له سهر دوو بهر ده زاره كه دهر ده كه ون جووت بن بدو زه وه؟

شيكار

ټه گهر  $A$  پوډاوي ((دهر كه و تني ژماره يه كې جووت له سهر بهر ده زاره سوور كه)) و  $B$  ((دهر كه و تني ژماره يه كې جووت له سهر بهر ده زاره شينه كه)) بېت ټه و  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ ټه و}$$

پېياز دوو بهر ده زاري هه لدا، سوور و شين، ټه گهر ټه و سهرجه مي دوو ژماره دهر كه و تنو كه 8 بېت بدو زه وه، ټه گهر زانيت سهرجه مه كه جوته؟ ده توانيت ټه نجامه كه ساغبكه يته وه ټه گهر بوشايي ټه گهره كاني ټه و تافيكردنه وپه يه كې هره يوه كې پشكني و ژماره دانه كانت هه ژمار كرد له لايه ك و ژماره ټه و دانانه ي پاساداني پوډاوي  $A \cap B$  له لايه كې تر هه ژمار كرد، پېژه دوه م بې يه كه م دو زيه وه.

1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6
2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6
3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6
4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6
5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6
6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6



ئەحمەد دوو کارتی لە 52 کارتی یاری پراکێشا، با  $A$  رووداوی «کاری یەکەم کارتی (شا) بێت» و  $B$  رووداوی «کاری دووهم کارتی (شا) بێت».

ئەحمەد پێش پراکێشانی کارتی دووهم کارتی یەکەمی گەڕاندەوه، ئایا دوو رووداوی  $A$  و  $B$  سەرەخۆن؟ ئەگەری روودانی  $A \cap B$  بدۆزەوه.

بەبێ ئەوهی ئەحمەد کارتی یەکەم بگەڕێنێتەوه، کارتی دووهمی پراکێشا. ئایا دوو رووداوهکە سەرەخۆن؟ ئەگەری روودانی  $A \cap B$  بدۆزەوه.

شیکار

ئەگەر  $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ، و بەهەمان شێوە ئەگەری روودانی  $B$  دەکاتە  $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ، چونکە کارتی یەکەم بۆ کۆمەڵەی کارتهکان گەڕێنراوەتەوه. کەواتە، ئەگەری  $B$  ئەگەر بزانی  $A$  هاتۆتەدی بریتییە لە  $P(B/A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = P(B)$  ئەمەش ئەوه دەسەلمینی کە دوو رووداوهکە سەرەخۆن:  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$

ئەگەری روودانی  $A$  دەکاتە  $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$  و ئەگەری روودانی  $B$  دەکاتە  $P(B) = \frac{3}{51}$ ، چونکە کۆمەڵەکە پاش پراکێشانی کارتی یەکەم بوو بە 51 کارت کە 3 کارتی (شا)ی تێدا، ئەگەری  $B$  ئەگەر بزانی  $A$  هاتۆتەدی یەكسان نابێت بە ئەگەری  $B$ ، واتە  $P(B/A) \neq P(B)$  ئەمەش ئەوه دەسەلمینی کە دوو رووداوهکە سەرەخۆ نین.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = \frac{1}{13} \times \frac{3}{51} = \frac{3}{663}$$

هەولێدە توورمگەیکە 5 گۆی سپی و 3 گۆی ڕەش تێدا، دوو گۆیەک لەدوای یەک پراکێشرا لەهەر بارێک دیاریبکە ئایا دوو رووداوهکە سەرەخۆن یان نا؟

ئەگەر  $A$  بریتییە لە ((گۆی یەکەم سپی بێت)) و رووداوی  $B$  بریتییە لە ((گۆی دووهم ڕەش بێت)) ئەگەر زانیت گۆی یەکەم گەڕانراوە ناو توورمگەیکە پێش پراکێشانی گۆی دووهم.

ئەگەر  $A$  بریتییە لە ((گۆی یەکەم سپی بێت)) و رووداوی  $B$  بریتییە لە ((گۆی دووهم ڕەش بێت)) ئەگەر زانیت گۆی یەکەم نەگەڕاوە ناو توورمگەیکە پێش پراکێشانی گۆی دووهم.

### ئەگەری سەرجهەم Total Probability

چالاک

سۆزان دوو شەشپالووی ژمارەکان شین و سوور هەڵدا، شێوهی خوارەوه بۆشایی نموونەیی ئەگەرەکانی ئەم تاقیکردنەوه هەرمەکیە پیشان دەدات. ئەگەر  $A_k$  رووداوی (سەرجهەمی دوو ژمارەیی دەرکەوتوو  $k$ ) وەلامی ئەوانەیی خوارەوه بدەوه.

1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6
2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6
3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6
4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6
5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6
6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6

1. هەریەکە لەم پرودانەوهی دین لەسەر شۆوهی کۆمەڵە بنووسەوه:  $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ ،  
 $A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}$  ئەگەری هەر پروداویک بدۆزەوه.  
پاشان دڵنیا بە کە سەرجهمی ئەگەرەکانیان  $= 1$ .
2. دیاریبکە کام لەو دوو پروداوانە پێشوو پروداوی جیان.
3. دیاریبکە کام دەرکەوتە بۆ ئەم تاقیکردنەوه هەپمەکیە سەر بە پروداویک لە پروداوەکانی پێشوو.
4. لەسەر شۆوهی کۆمەڵە بنووسەوه، پروداوی  $B$  (سەرجهمی دوو ژمارە دەرکەوتوو لە 5 زیاتر  
نیە) پاشان ئەگەری هاتنەدی بدۆزەوه.
5. هەریەکە لەم پروداوانە دیت لەسەر شۆوهی کۆمەڵە بنووسەوه:  $B \cap A_2, B \cap A_3, B \cap A_4, B \cap A_5, B \cap A_6, B \cap A_7, B \cap A_8, B \cap A_9, B \cap A_{10}, B \cap A_{11}, B \cap A_{12}$ ،  
پروداوی هەریەکەیان بدۆزەوه.
6. دڵنیا بە لە پرسباری پێشوو کە سەرجهم پروداوەکان  $P(B) =$ .

پشت بەستن بە چالاکی پێشوو، دەتوانین بنووسین،

$$P(B) = P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \dots + P(B \cap A_{12})$$

ئەم پەيوەندییەش باریکی تایبەتە لە یاسای ئەگەری سەرجهم.

### یاسای ئەگەری سەرجهم

ئەگەر  $A_1, A_2, \dots, A_n$  چەند پروداویک بن لە تاقیکردنەوهی هەپمەکی، هەر دەرکەوتەیهک لە  
دەرکەوتەکانی یەکێک بێت لەو پروداوانە، ئەگەر  $B$  پروداویک لە پروداوەکانی تاقیکردنەوه  
هەپمەکییە بێت، ئەوا  $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$

60%ی خوێندکارانی پۆلی دوانزەهەمی ئامادەیی رزگاری تاقیکردنەوهی لقى زانستى و ئەوانیتر  
تاقیکردنەوهی لقى وێژەبیان ئەنجامدا، پێژەری دەرچوونی بەشی زانستى 70% و بەشی  
وێژەبى 60% بوو، خوێندکاریکی پۆلی دوازدە بە هەپمەکی هەلبژێردا ئەگەری ئەوهی  
خوێندکارەکه دەرچووبێت بدۆزەوه؟

شیکار

ئەم پروداوانە بەکاردهێنین

- $S$ : ((خوێندکارەکه تاقیکردنەوهی لقى زانستى ئەنجام دا بێت)).  
 $L$ : ((خوێندکارەکه تاقیکردنەوهی لقى وێژەبى ئەنجام دا بێت)).  
 $A$ : ((خوێندکارەکه لە ئەزمونە گشتییەکان دەرچووبێت)).

نموونه



هك دياره هەر دمرکهوتیهك له دمرکهوتهکانی ئەم تاقیکردنەوه هەپمەکییه یهکێک له دوو پروودای S یان L ئەنجام دەدات بەلام هەردووکیان پێکەوه ئەنجام نادات کەواته دەتوانین ئەگەری سەرجهەم بەکاربهێنین.

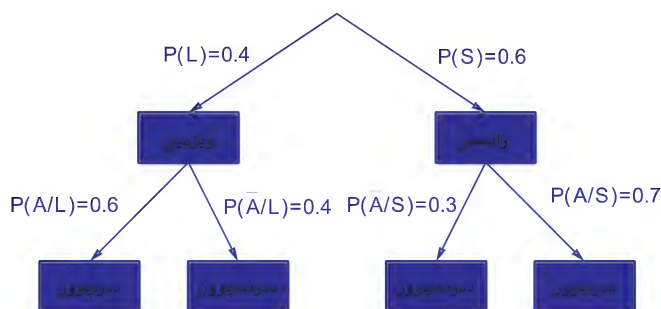
$$P(A) = P(A \cap S) + P(A \cap L)$$

$$P(A \cap S) = P(S) \times P(A/S) = 0.6 \times 0.7 = 0.42 \text{ بەلام}$$

$$P(A \cap L) = P(L) \times P(A/L) = 0.4 \times 0.6 = 0.24 \text{ کەواته}$$

دەتوانین پرسیارەکه به خستەوی درەختی بنوینین.

$$P(A) = P(A \cap S) + P(A \cap L) = 0.42 + 0.24 = 0.66$$



هەولێده 65% خوێندکارانی ئامادهیی هەولێر کوپ و ئەوانی تر کچن 80% له کچهکان ئارەزووی خوێندنەوهیان ههیه و 55% له کوپهکان ئارەزووی خوێندنەوهیان ههیه، خوێندکارێکیان به هەپمەکی هەلبژارد ئەگەری ئەو خوێندکارە ئارەزووی خوێندنەوهی هەبێت چەندە؟

## راھێنان

### بەردەوامبوون له بیرکاریدا

- 1 دوو نمونه بهێنەوه یهکێکیان بۆ دوو پروودای سەرپهخۆ و ئەوی تریان بۆ دوو پروودای ناسەرپهخۆ.
- 2 چۆن ئەگەریک دەدۆزیتەوه دوو پروودای سەرپهخۆ بهیهکەوه پاسادان بکات؟
- 3 جیاوازی نیوان دوو پروودای جیاو دوو پروودای سەرپهخۆ پروونبکەوه.

### راھێنانی ئاراسته کراو

- 4 A و B دوو پرووداون له تاقیکردنەوهیهکی هەپمەکی  $P(A) = \frac{3}{4}$  و  $P(B) = \frac{1}{3}$  و  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ؛ بدۆزەوه: ئایا دوو پرووداوهکه سەرپهخۆن؟ وهلامهکەت پروونبکەوه
- 5 A و B دوو پروودای سەرپهخۆین له تاقیکردنەوهیهکی هەپمەکی  $P(A) = 0.2$  و  $P(B) = 0.3$  ئەمانه بدۆزەوه.

$P(A \cap B)$  ا
 $P(A \cup B)$  ب
 $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  ج
 $P(\bar{A} \cup \bar{B})$  د

## راھبەن و جىيە جىكردن

6  $A$  و  $B$  دوو پووداوى سەربەخۇن  $P(A) = \frac{3}{8}$  و  $P(B) = \frac{1}{3}$  و  $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

$P(A/B)$  و  $P(B/A)$  بدۆزەۋە.

7 نەۋزاد پارچە پارەيەكى كانزايى سى جار ھەلدا يەكەدواى يەك. ئەگەرى تاقىكردنەۋەيى

$P(A/B)$  بدۆزەۋە كاتىك  $A$ : ((خەت زىاتر دەرکە وتبىت لە شىر)) و  $B$ : ((خەت لە ھەلداى يەكەم دەرکە وتبىت)).

8  $A$  و  $B$  دوو پووداوى سەربەخۇن لە تاقىكردنەۋەيەكى ھەرەمەكى.

$P(A \cap B) = 0.15, P(B) = 0.3, P(A) = 0.5$

$P(A/B)$  بدۆزەۋە. ئايا دوو پووداۋەكە سەربەخۇن؟ پرونېكەۋە.

9 **پىشەسازى** كۆمپانىيەى فورات بۇ بەرھەمھىنەنى گلوپى كارگە 3 كارگە لە خۆۋەدەگرىت

(ھەيەتى). بەرھەمى كارگەى يەكەم 40% ھەموۋى بەرھەمەكانى كۆمپانىيەكە

دەردەھىنەت لە كاتىكدا ھەريەكە لە دوو كارگەكەى تر 30% لە گشت بەرھەمەكان

دەردەھىنەت. لە لايەكى ترەۋە پىژەى ئەۋ گلوپانەى بىسوۋدن دەكاتە 20% لە

بەرھەمھىنەنى كارگەى يەكەم ۋە 15% لە بەرھەمھىنەنى كارگەى دوۋەم ۋە 10%

لە بەرھەمھىنەنى كارگەى سىيەم (ئەگەر بزانىت گلوپەكە بىسوۋد).

گلوپىك بەشۋەى ھەرەمەكى ھەلپىژىردا ئەگەرى گلوپەكە بىسوۋد بىت چەندە؟ ۋە ئەگەرى

ئەۋەى لە بەرھەمى كارگەى سىيەم بىت بىسوۋد بىت چەندە؟

10 **ۋەزىش** تىپى ھەۋلىر بۇ تۋىپى بى 70% يارىيەكانى لەناۋ عىراق ۋە ئەۋانى تر لەدەرەۋەى

ولات ئەنجامدەدات، ئەگەرى بىردنەۋەى لەناۋ ولات بىرىتييەلە 0.6 ۋە لەدەرەۋە 0.5.

خەفتەى داھاتوۋ تىپەكە يارىيەك ئەنجامدەدات ئەگەرى بىردنەۋەى چەندە؟ ئەگەرى

ئەنجامدانى يارىيەكە لەناۋ ولاتدا چەندە؟ كە براۋەبىت.

11 150 مامۇستا سەرىپەشتى خولەكانى راھىنان لە

زانستەكان و بىركارى دەكەن ۋە لەماۋەى خولەكە سى

جۆر چالاكى (شىكارى پرسىيارەكان ۋە ۋانە وتنەۋە و

نوۋسىنى راپۇرت) ئەنجامدەدەن.

سەرچەم	نوۋسىنى راپۇرت	ۋانە وتنەۋە	شىكارى پرسىيارەكان	زانست
90	27	18	45	
60	18	9	33	بىركارى
150	45	27	78	سەرچەم

أ ئايا دوو پووداوى «بەدۋادچوۋنى خولى بىركارى دەكات» و «شىكارى

پرسىيارەكان دەكات» دوو پووداوى سەربەخۇن.

ب ئايا دوو پووداوى «بە دۋادچوۋنى خولى زانستەكان دەكات» و «نوۋسىنى راپۇرت

دەكات» دوو پووداوى سەربەخۇن.

## روانين بۆدواوه



دانا دوو بەردەزاری ھەلدا، ئەگەری ئەمانە بدۆزەو.

12 سەرجهمی دوو ژمارەکی سەر دوو بەردە زارەکی 12 بێت.

13 یەك لە دوو ژمارە دەرکەوتووێکە بەلایەنی کەمەوێ تەك بێت؟

14 یەك لە دوو ژمارە دەرکەوتووێکە بەلایەنی کەمەوێ لە 3 کەمتر بێت؟

## روانين بۆپیشەو



15 لەو خشتەى خوارەو نمرەکانى ژمارەى پالپوراو بۆ وەرگیران لە کۆلیژى پزىشكى نیشان

دەدات، خشتەكە تەواوبكە بە دۆزینەوێ تێكپراى نمرەکانى ھەریەکیکیان ئەگەر زانیت كە

بەرزکردنەوێ نمرەكان لە وەرگیران بەم جۆرەيە:

بیرکاری 3؛ زانستەكان 4؛ زمانى ئینگلیزى 2؛ زمانى كوردى 1

خویندكار	بیرکاری	زانستەكان	زمانى ئینگلیزى	زمانى كوردى	تێكپرا
لارى	45	65	55	70	
لۆرا	75	70	50	60	
لیندا	80	65	55	40	

## Linear Models



هه‌ندیك جار وا دیاره كه  
كۆمه‌له‌ پیدراویك به‌های نه‌خشه‌ی  
هیائی به‌نزیكی دیاریده‌كات. نه‌گه‌ر  
له‌ توانات داپێت نه‌و نه‌خشه‌یه  
دیاریبه‌كه‌یت نه‌وا ده‌توانی هه‌موو  
نه‌و شتانه‌ی پێشبینی ده‌كرێن سه‌ر  
به‌ بابه‌ته‌كه‌ت بنه‌وسه‌وه‌.

سپسرکی سنۆبەر دەنگێك دەر دەكات بەهۆی لێكخشانەکانی دوو بەلەكەیی، هێزی ئەو دەنگە زیاد دەكات بە زیادبوونی لێكخشانەكە. و زانایان سەرنجیاندا كە خێرای ئەو جوولانە (لێكخشانە) زیاد دەكات بە زیادبوونی پلەیی گەرمی، بەمەش دەتوانرێت پلەیی گەرمی دیاریبکریت بە بیستنی دەنگی ئەو میروولانە لەخستنی خوارووە پێدراوی دەنگەکانی ئەو میروولانە دەر دەکەوێت (بە ژمارەیی لەرەلەرە لە چرکەبەدا) كە لە 15 پلەیی گەرمی حیاواز تۆمار کرێ.

14	17	16	17	15	16	15	17	15	16	17	18	20	16	20	زماردی له رد لهر
76	84	81	83	80	83	69	82	70	75	81	84	93	72	89	پله ی گهر می

ئایا دەتوانیت پلەي گەرمی بخەمڵینیت ئەگەر هیڤی دەنگی میروڵەکانت زانی (بە ژمارەي لەرەلەرەکانی لە چرکەبەکدا).

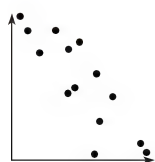
## Decay ليٽريونونهوه

مروّف تووشی زور پرسیار ده‌بیت‌وه که دوو گۆراوی ئاماری تئدایه، یه‌کی‌کیان کار له ئەوی دیکه‌یان ده‌کات وه که پرسیار پێشوو ئامارناسان گه‌رانه‌وه **Regression** به‌کارده‌هێنن بۆ لیکۆلینه‌وه‌ی ئەم جووره‌ په‌یوه‌ندییه‌ به‌پێی چەند پێدراوی‌کی دیاریکراو.

ئامارناسان خالە پوونکردنه‌وه‌کان **Scatter Plot** به‌کارده‌هێنن بۆ تیگه‌یشتن له‌ په‌یوه‌ندی نێوان دوو گۆراو و ئاراسته‌ و هێزه‌که‌ی. وباسی په‌یوه‌ستبوون **Correlation** ده‌کەن بۆ دهرپرین له‌ هێزی په‌یوه‌ندی نێوان دوو گۆراو و ئاراسته‌که‌ی.



یه یوهستی نییه



په یوه سټی سالب  
لاری سالی



یه یوهستی موجب  
لاری موجب

ٲامارناسان مهوڊاي نوانڊني نمونونه يه ڪي هيٺي ڪو مهله پيڊراويڪ به هو ي ژماره ي  $r$  ڪه پي ي ڊه لڏين هاوڪو لکي ي په يوه ستي **Correlation coefficient** ده يون .

## ئامانجەكان

- نمونەى ھېلى بۇ نواندى  
كۆمەللىك دەدۆریتەوہ.  
• نمونە ھېللیہکان بۇ  
ئەجامدانى پېشبینیہکان  
بەکار دەھتېت.

زاراوهکان  
Vocabulary

## گهرا نه وه (تراجع)

## Regression

یہ یوہستہوون

## Correlation

هاو کو لکھی یہی وہ ست

### Correlation coefficient

## راسته‌هیّلی باشتَرین نواندن

Line of best fit



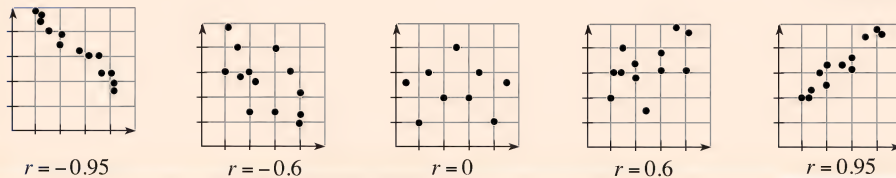


## سیفہ تہکانی هاوکولکھی پھیوہست

هاوکولکھی پھیوہست **Correlation Coefficient** ژمارهیه که پاسادانی  $-1 \leq r \leq 1$  دهکات. ئەگەر  $r = 1$ ، ئەوا ئەو خالە پروونکردنەوانەهی کۆمەڵیک پیدراو دەنویئن، راستەهێلکی لاری موجهب پیکدههینن.

ئەگەر  $r = 0$ ، ئەوا پھیوہستی لەنێوان دوو گۆراوەکە نییه.

ئەگەر  $r = -1$ ، ئەوا ئەو خالە پروونکردنەوانەهی پیدراوەکان دەنویئن راستەهێلکی لاری سالب پیکدههینن.



ئامارناسان جۆره جیاوازهکانی نهخشهکان بهکاردههینن بۆ باسکردنی پھیوهندی نێوان دوو گۆراو، بهلام گرنگیهکی زۆر به بهکارهێنانی نهخشه هێلییهکان دهن بهتایبهتی ئەگەر پھیوهندیهکی بههێز لهنێوان خالە پروونکردنەوانەکان بهدیارکهوت و وا دیارکهوتن که نزیکن له پیکهینانی راستههێلک. لهبهرئەوه ئەو وانیهی باسی ئەمهی دیت دهکات:

گهڕانهوهی هێلی **Linear Regression**، ئەگەر دوو گۆراو به پھیوهندیهکی هێلی بههێز پیکهوه بهستران ئەوا تۆ راستههێلکی باشتترین نواندن **Line of Bestfit** بهکاردههینن بۆ دهربرپن لهو پھیوهندیه و ئەنجامدانی پێشبینییهکان.

(1) **رێگای کهمترین دووجایهکان** **Least Squares**، ئەم رێگایه زۆر ورده بهلام پێویستی به ژمیریارییهکی بهکجار زۆر هیه یان دهبیت بژمیر بهکاربهینن.

(2) **رێگای پروونکردنەوهی** **Graphic Method**، لەم رێگایه خالە پروونکردنەوانەکان دیاریدهکریت که پیدراوهکانی خشتهی پیدراوهکان دەنویئن و راستههێلک دهکیشریت که نزیکبیت له ههموو خالەکان.

رێگای راستههێلکی مایه **Mayer Line**، لەم رێگایه پیدراوهکان بۆ دوو بهشی یهکسان بهنزیکهی

(3) بهشدهکریت لهباری درێژی و دووخال دیاریدهکریت، لهسەر راستههێلکه که مهرج نیه خاله دراوهکان بن، پاشان ئەو راستههێلکی که بهو دوو خالە دادهپوات، به راستههێلکی باشتترین نواندنی دادهنن.

(4) **رێگای ناوهراسته** **Median Method**، لەم رێگایه پیدراوهکان دهکریت سێ بهش، و سێ خال دیاریدهکریت که ههریهکیان بهشیک لهو سێ بهشه دەنویئن، پشت بهو راستههێلکه دهبستریت که بهخالی دووهم دادهپوات و تهریبه بهو راستههێلکی بهو دوو خالە دادهپوات که بهشی یهکهم و سێههم دەنویئن. لهو وانیهدا رێگای پروونکردنەوه و راستههێلکی مایهرو رێگای ناوهراسته وهردهگرین بۆ ئەوهی لهههژمارکردنی ئالۆز دووربکهوینهوه و نابیت لهبیربکهین که ئەنجامهکانی ئەم رێگایانه ئەنجامی نزیکهین.

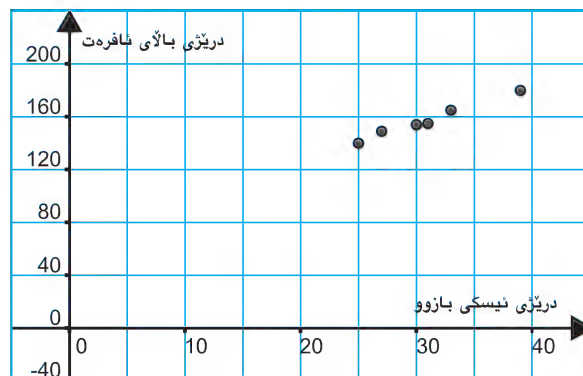
## رێگای پروونکردنەوهی Graphic Design

جێبهجێکردن لهسەر زانستی پهگهزه مڕۆیهیهکان زانیانی پهگهزه مڕۆیهیهکان درێژی ئیسکی بازوو کهشان به ئەنیشکی ئافرهت دهبهستتیهوه بۆ خهملاندنی درێژی ئافرهتهکه بهکاردههینن، لهخشتهی دیت درێژی بالای ژمارهیهک ئافرهت (به سانتیمهتر) و درێژی ئیسکی بازوویان به (سانتیمهتر) دهدهکهوین، خالە پروونکردنەوانەکان دیاریبکه که پیدراوهکانی خشتهکه بنویئن، و درێژی ئیسکی بازوو وهک گۆراوی ئازاد بهکاربهین، پاشان هاوکیشهی راستههێلکی باشتترین نواندن بۆ ئەو پیدراوانه بدۆزهوه، درێژی بالای ئافرهتیک چهنده که ئیسکی بازووهکی 37cm بێت؟

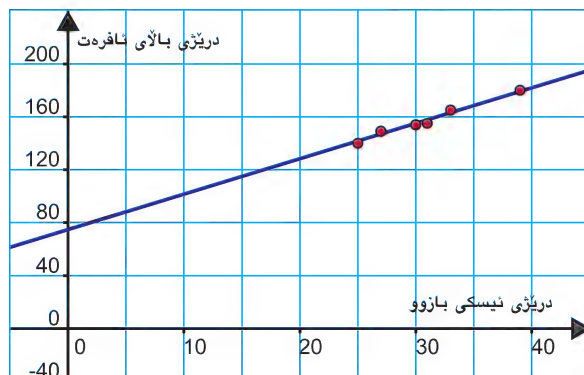
دریژی ئیسی بازووی ژمارهیهک ئافرهت								
31	27	39	25	33	30	27	35	دریژی ئیسی بازوو
155	149	180	140	165	154	149	167	دریژی بالای ئافرهت

شیکار

ههنگاوی 1: دیاریکردنی خاله پروونکردنه وهیههکان که پیدراوهکان دهنوینن



ههنگاوی 2: کیشانی راستههیلکه.



ههنگاوی 3: دیاریکردنی دوو خال له سهه راستههیلکه

(14, 110) و (32, 160).

ههنگاوی 4: دۆزینهوهی هاوکیشی ئهه راستههیلکه بهه دوو خاله دا دهپوات. هاوکیشی ئهه

راستههیلکه بهه دوو خالی (14, 110) و (32, 160) دا دهپوات بدۆزهوه.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 110 = \frac{160 - 110}{32 - 14}(x - 14)$$

$$y = 2.78x + 71.11$$

بۆ ئهوهی بههای پیشینکراوی دریژی ئافرهتیهک ههژماریهکیت دریژی ئیسی بازووهکی 37cm بیته 37 له جیاتی x له هاوکیشی باشتین نواندن دابنی.

$$y = 2.78x + 71.11$$

$$y = 2.78 \times 37 + 71.11$$

$$y = 173.97$$

$$174 \text{ cm}$$

ههولبده

**پاسکیل سواری** له خشتهی خوارهوه پیدراوهکانی ژمارهی ئەو کیلۆمەترانەی که ژمارهیه که له رکابه‌ره‌کان به‌پێی کات ( به کاتژمێر) له پێشپڕکێیه‌کی پاسکیل سوارییدا ده‌یبرن دهرده‌که‌وێت هاوکێشه‌ی راسته‌هێڵی باشت‌ترین نواندنی ئەم پیدراوانه‌ بدۆزه‌وه. پێشپڕکێکه‌ره‌که‌ له‌ماوه‌ی 11 کاتژمێر چهند ده‌بڕێت.

پێشپڕکێی پاسکیل سواری													
10	2	7	7	8	3	10	4	9	5	5	2	6	1
97	31	71	60	75	36	104	56	98	57	71	20	45	9

راسته‌هێڵی مایر Mayer St.line

نموونه

2

جێبه‌جێکردن له‌سه‌ر باری که‌ش و هه‌وا  
شاری ئەکرۆن له‌ ئەم‌ریکا و شاری ولنگتۆن له‌ نیوزلندا هه‌مان دووریان هه‌یه‌ له‌ هێڵی که‌مه‌ره‌یی (خط الاستواء) یه‌که‌مه‌یان له‌نیوه‌ی سه‌ره‌وه‌ی گۆی زه‌وی و ئەوی تریان له‌نیوه‌ی خواره‌وه‌ی گۆی زه‌وی. خشته‌ی خواره‌وه‌ به‌رزترین ناوه‌نده‌ ژمێره‌کانی پله‌ی گه‌رما به‌ فه‌ره‌نهایتی هه‌ردوو شار له‌ماوه‌ی 12 مانگ دهرده‌که‌وێت خاڵه‌ پوونکردنه‌وه‌کان دیاریبکه‌ که‌ پیدراوه‌کانی خشته‌که‌ ده‌نویئن، یه‌کتر به‌ستنی نیوان دوو گۆراوه‌که‌ بدۆزه‌وه‌ کاتی که‌ ئەوه‌ ناوه‌نده‌ ژمێرییه‌ 65 بێت له‌ ئەکرۆن؟

ناوه‌نده‌ ژمێره‌یییه‌کانی به‌رزترین پله‌ی گه‌رمی (فه‌ره‌نهایت)												
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	مانگ
38	49	61	73	80	82	78	70	59	48	37	33	ئه‌کرۆن
64	60	57	55	52	51	53	56	62	65	67	67	ولنگتۆن

شیکار

هه‌نگاوی 1: دووباره‌ پیدراوه‌کان سه‌ر به‌ره‌و ژوور ریزبکه‌ به‌پێی گۆراوی ئازاد.

82	80	78	73	70	61	59	49	48	38	37	33	ئه‌کرۆن
51	52	53	55	56	57	62	60	65	64	67	67	ولنگتۆن

هه‌نگاوی 2: ئەم خشته‌ به‌شبکه‌ بۆ دوو خشته‌ی یه‌کسان له‌ ژماره‌ی ستوونه‌کان.

82	80	78	73	70	61		59	49	48	38	37	33	ئه‌کرۆن
51	52	53	55	56	57		62	60	65	64	67	67	ولنگتۆن

هه‌نگاوی 3: هه‌ریه‌که‌ له‌  $x_1$ ، ناوه‌نده‌ ژمێره‌یی گۆراوی ئازاد و  $y_1$  ناوه‌نده‌ گۆراوه‌کانی په‌یوه‌ست،

له‌به‌شی یه‌که‌می خشته‌که‌ بدۆزه‌وه‌. پاشان هه‌ریه‌که‌ له‌  $x_2$  ناوه‌نده‌ به‌هایه‌کانی

گۆراوی ئازاد و  $y_2$  ناوه‌نده‌ به‌هایه‌کانی گۆراوی په‌یوه‌ست، له‌به‌شی دووه‌می

خشته‌که‌ بدۆزه‌وه‌.

$$y_1 = \frac{67+67+64+65+60+62}{6} = 64.16 \text{ و } x_1 = \frac{33+37+38+48+49+59}{6} = 44$$

$$y_2 = \frac{57+56+55+53+52+51}{6} = 54 \text{ و } x_2 = \frac{61+70+73+78+80+82}{6} = 74$$

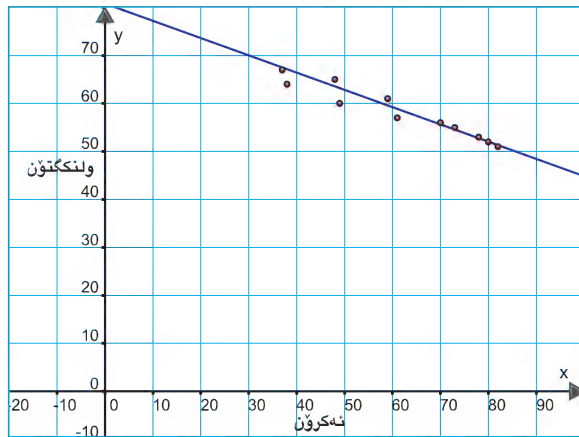
هەنگاوی 4: ھاوکیڤشە ئەر ڕاستەھێڵە بە دوو خالی  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  دا دەرواوت بدۆزەو.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 64.16 = \frac{54 - 64.16}{74 - 44}(x - 44)$$

$$y = -0.34x + 79.06$$

هەنگاوی 5: خالە ڕوونکردنەوێکان و ڕاستەھێڵی باشتترین نواندن دیاریکە.



ئەگەر ناوەندە ژمیری بەرزترین پلە گەرمی لە ئەکرۆن 65 پلە بێت، پێشبینی دەکرێت ئەم ناوەندە ژمیریە لە ولنگتۆن.

$$y = -0.34x + 79.06$$

$$y = -0.34 \times 65 + 79.06$$

$$y = 56.96$$

واتا 57 پلە بە نزیکەیی.

هەولێدە تۆپی سەبەتە خالە ڕوونکردنەوێکان دیاریکە بۆ نواندن پێدراوەکانی خشتەکە، پەيوەستی نیوان دوو گۆراوەکە بدۆزەو، ڕاستەھێڵی باشتترین نواندن بکێشە و ھاوکیڤشەکە بدۆزەو. ژمارە خالەکان لە ماوەی 25 خولەک بە چەند پێشبینی دەکەیت؟

ژمارە خالەکان لە ماوەیەک										
30	15	27	19	23	39	20	8	35	28	کات
19	4	15	9	10	31	12	2	13	16	خالەکان

### رێگای ناوەندە ژمیریەکان

جێبەجێکردن لەسەر خواردن

لەخشتە دیۆ پێدراوەکانی هیندی ئەر چەوریە و بەها گەرمییە جۆرە بابۆلەیهکان تێیدا بە درەدەکویت. ڕاستەھێڵی باشتترین نواندن بدۆزەو. بەهای گەرمی بابۆلەیهک 17 گرام چەوری تێدا بێت بە چەند پێشبینی دەکەیت.

نموونه



پېدراوه خوراکييه کاني هه ند له جوړه بابوله کان								
14	21	10	12	15	12	9	5	هيندي چهوريه کان (به گرام)
390	580	455	530	420	460	375	360	به هاي گهرمي (گهرموکه)

شیکار

ههنگاوی 1: دووباره خشته که بنووسه وه و پېدراوه کاني به ره وژور ريزيکه به پي به هايه کاني گوراي نازاد، که هيندي چهوريه کانه لهه پرسياره دا.

پېدراوه خوراکييه کاني هه ند له جوړه بابوله کان								
21	15	14	12	12	10	9	5	هيندي چهوريه کان (به گرام)
580	420	390	530	460	455	375	360	به هاي گهرمي (گهرموکه)

ههنگاوی 2: ئه و خشته يه دابه شبکه يو سي به ش که ژماره ي ستونه کاني به شي يه که م و سي يه م يه کسان بن و ژماره ي ستونه کاني دووهم نزيک بيت له ژماره ي هاويه شي دوو ستوني يه که م و سي يه م.

پېدراوه خوړاکييه کانی هه نديک له جوړه بابوله کان										
21	15	14		12	12		10	9	5	هيندی چه وړيه کان (به گرام)
580	420	390		530	460		455	375	360	به های گهرمی (گهرموکه)

ههنگاوی 3: ههريه که له  $x_1$  ناوه رپاسته ي گوراي نازاد، و  $y_1$  ناوه رپاسته ي گوراي په يوه ست له به شي يه که م بدوژوه، پاشان ههريه که له  $x_3$  ناوه رپاسته ي گوراي نازاد و  $y_3$  ناوه رپاسته ي گوراي په يوه ست له به شي سي يه م بدوژوه. ناوه ند به هاي  $x$  ي به شي يه که م ده کاته  $x_1 = 9$  و ناوه ند به هاي  $y$  ده کاته  $y_1 = 375$  له و کاته دا ناوه رپاسته ي  $x$  ي به شي سي يه م  $x_3 = 15$  و ناوه رپاسته ي  $y$  بريتيه له  $y_3 = 420$ .

ههنگاوی 4: لاري ئه و رپاسته هيله بدوژوه که به دوو خالي  $(x_1, y_1)$  و  $(x_3, y_3)$  دا ده رپوات. لاري رپاسته هيلی  $d$  که به دوو خالي  $(x_1, y_1)$  و  $(x_3, y_3)$  دا ده رپوات ده کاته

$$m = \frac{420 - 375}{15 - 9} = 7.5$$

ههنگاوی 5:  $x_2$  ناوه ندی ژميره يي گوراي نازادي هه موويان بدوژوه.  $y_2$  ناوه ندی ژميره يي گوراي په يوه ستی هه موويان بدوژوه.

$$x_2 = \frac{5 + 9 + 12 + 15 + 12 + 10 + 21 + 14}{8} = 12.25$$

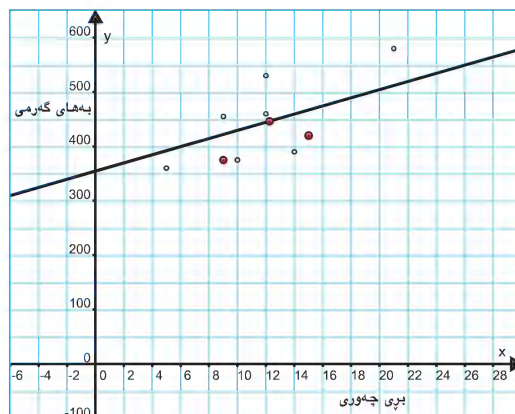
$$y_2 = \frac{360 + 455 + 460 + 420 + 530 + 375 + 580 + 390}{8} = 446.25$$

ههنگاوی 6: هاوکيشه ي ئه و رپاسته هيله ي به خالي  $(x_2, y_2)$  دا ده رپوات و لاريه که م  $m$  ه بدوژوه.

$$y = 7.5x + 354.375 \text{ يان } y - 446.25 = 7.5(x - 12.25)$$

ئه و هاوکيشه ي ده ستکه و تووه به نزيکه يي هاوکيشه ي رپاسته هيلی باشتري نواندني کومه له به هايه کانه.

ههنگاوی 7: خالە پروونکردنەوهکان دیاریکە که پیدراوهکانی خشتهکه دهنوینن، خالەکانی  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  و  $(x_3, y_3)$  دیاریکە، راستەهێلی باشتترین نواندن بکێشه.



کەواتە بەهای گەرمی بابۆلەیهک 17 گرام چەوری تێدابێت بریتییە لە

$$y = 7.5x + 354.375$$

$$y = 7.5 \times 17 + 354.375$$

$$y = 481.875$$

واتا 782 گەرمۆکە ی گەرمی بەنزیکەیی.

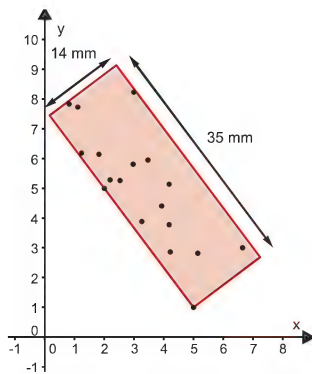
هەولبەدە لەم خشته پیدراوهکانی چەند ئۆتومبیلێک بە هەپمەکی هەلبژێردراون و ئەو ماوەی که ئۆتومبیلەکه دەبیرپێت بە بەکاربردنی یەك لیتر سووتەمەنی بەپێی هێزەکهی (بەهیزی ئەسپ) دهنوینێت، ئۆتومبیلێك هێزەکهی 150 ئەسپ بێت بەیهك لیتر چەند ماوه دەبرپێت.

هیزی ئۆتومبیلەکان و دووری برۆ لەیهك لیتر										
هیز	175	255	140	165	115	120	190	180	110	125
دووری لە هەر لیترێک (km/l)	3.61	2.13	4.1	2.95	5.25	4.6	2.46	3.45	5.75	4.95

خالە پروونکردنەوهکان دیاریکە که بیدراوهکانی خشتهکه دهنوینن بە بەکارهێنانی هیزی ئۆتومبیلەکه وهك گۆراوی ئازاد، پاشان هاوکیشی راستەهێلی باشتترین نواندن بدۆزەوه، ئەو دوورییە ئۆتومبیلێك هێزەکهی 210 ئەسپ بێت دەبیرپێت بدۆزەوه؟

## هاوكۆلكەي پەيوەستى

ھەژمارىدىن ھاوكۆلكەي پەيوەستى  $r$  پىۋىستى بە ھەژمىرىدىن ئالوزيان بەكارھىننى بژمىر ھەيە، بەلام دەتوانرىت بەھاي نىكەيى ئەو ھاوكۆلكەيە بە پۈنكرىنەۋەيى بدۆزىتەۋە. بۆدۆزىنەۋەيى بەھاي نىكەيى ھاوكۆلكەي پەيوەستى بۆچەند خالىكى پۈنكرىنەۋەيى، بچوكتىرىن لاکىشە بكىشە كە ھەموو خالەكان لەخۆبگىرىت و پىۋانەي لايە درىژەكەي  $L$  و لايە كورەكەي  $\ell$  بدۆزەۋە. بەھاي نىكەيى ھاوكۆلكەي پەيوەستى برىتييەلە  $r \approx \pm \left(1 - \frac{\ell}{L}\right)$  و نىشانەكەي برىتييەلە نىشانەي پەيوەستى، واتا نىشانەي - ئەگەر ھاوكۆلكەكە سالب بىت و نىشانەي + ئەگەر ھاوكۆلكەكە مۇجەب بىت.



بەھايەكى نىكراۋ بۆ ھاوكۆلكەي پەيوەستى بۆ خالە پۈنكرىنەۋەيەكانى بەرامبەر بدۆزەۋە.

4

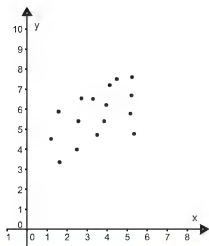
غونە

شىكار

$$L = 35, \ell = 14$$

$$r \approx -\left(1 - \frac{\ell}{L}\right) = -\left(1 - \frac{14}{35}\right) = -0.6$$

بەھايەكى نىكراۋ بۆ ھاوكۆلكەي پەيوەستى بۆ خالە ھەۋلىدە پۈنكرىنەۋەيەكانى بەرامبەر بدۆزەۋە.



## راھىنەن

### بەردەوامبون لە بىر كارىدا

- 1 ھاوكۆشەي راستەھىلى باشتىن نواندىن بۆ كۆمەلە پىدراۋىك برىتييەلە  $y = 3.2x - 12.5$  ئايا پەيوەستى نىۋان گۆپاۋە ئامارىيەكان مۇجەبە يان سالبە؟
- 2 ھاوكۆلكەي پەيوەستى دوو گۆپاۋى ئامارى دەكاتە  $r_1 = 0.65$  و ھاوكۆلكەي پەيوەستى دوو گۆپاۋى تر دەكاتە  $r_2 = -0.75$ ، كام ھاوكۆلكە پەيوەستى بەھىزتر دەردەبىرېت.
- 3 ئايا دەتوانىت بەھايەكى نىكەيى ھاوكۆلكەي پەيوەستى بەھىنەۋە، ئەگەر لە خالە پۈنكرىنەۋەكان ھىچ پەيوەستىيەك لەنىۋان دوو گۆپاۋەكە دەرنەكەۋىت، ۋەلامەكەت پۈنكرىنەۋە.

## راھینانی ئاراستە کراو

4

**ئوتومبیلەکان** خالە پروونکردنەوێکان بکێشە بۆ نواندنی پێدراوێکانی خشتەکە، بە بەکارھێنانی ژمارەى گالۆنەکان وەك گۆراوى ئازاد، راستەھێڵى باشتەرىن نواندن بکێشە و ھاوکیشەکەى بدۆزەو، ئایا پەییوەستییهکە پەییوەستییهکى بەھێز دەرەکەوێت.

دووری بپاو (km)							
10.1	8.7	12.3	10.1	10.6	9.8	11.2	ژمارەى گالۆنەکان
305	263	368	324	332	296	338	دووری بپاو

5

**نابووری** لەخشتەى خوارەو پێدراوێکانى پلەى گەرمى لەماوەى حەفت مانگ و نرخى ساردکەرەو (بە ھەزاران دینار) لە یەکیک لە مالەکان دەرەکەوێت.

پلەکانى گەرما							
38	49	42	36	44	42	38	ناوەندە پلەى گەرما
86	67	74	83	75	79	93	بپە پارەى

**أ** خالە پروونکردنەوێکان پێدراوێکانى خشتەکە دەنۆین بکێشە بە بەکارھێنانى ناوەندە ژمیرەى و پلەى گەرمى وەك گۆراوى ئازاد.

**ب** ھاوکیشەى باشتەرىن نواندن بۆ راستەھێڵ بە بەکارھێنانى وێنەى پروونکردنەوێکەى بدۆزەو و پروونکردنەوێکەى بکێشە.

**ج** ئایا پەییوەستى نیوان دوو گۆراوێکە سالبە یان موجەبە؟ ئایا پەییوەستى نیوانیان بەھێزە یان لاوازە؟

**د** بپە پارەى ساردکەرەو بۆ مانگیك تیکراى پلەى گەرمى 40 پلەبێت بخەملێنە، وردى ئەم خەملاندنە دیاریبکە؟

6

**خویندنگاکان** لەخشتەى خوارەو پێدراوێکانى ژمارەیکە مامۆستا و ژمارەیکە خویندکار لە سامپلیكى ھەرەمەكى دەرەکەوێت لە چەند خویندنگایەك.

ژمارەى خویندکار و مامۆستایەکان								
84	76	62	110	49	114	52	92	ژمارەى مامۆستایەکان
910	796	813	1312	381	753	653	1050	ژمارەى خویندکارەکان

**أ** خالە پروونکردنەوێکان بکێشە، پێدراوێکان بنوینیت بە بەکارھێنانى ژمارەى مامۆستایەکان وەك گۆراوى ئازاد.

**ب** بە بەکارھێنانى جەبر ھاوکیشەى راستەھێڵى باشتەرىن نواندن بدۆزەو و پروونکردنەوێکەى بکێشە.

**ج** ژمارەى مامۆستایەکان لە خویندنگایەك 600 مامۆستا بێت، ژمارە خویندکارەکان بە چەند دەخەملێنرێت بخەملێنە ئەم خەملاندنە چەند وردە.



## راھىنان و جىيە جىكردن

**7 نرخاندى پلىتەكان** بەرپۆبەرى يەككە لە تىمە مۇسقىيەكان نرخی بلىتەكانى ھاتنە ژوورەو بۆ ئاھەنگى تىمەكە و ژمارەى ئامادەبووان بەپپى ئەم خشتەيە تۆمارکرد.

ئامادەبووان بەپپى نرخی كارتەكانى چوونە ژوورەو (بە ھەزاران دىنار)									
نرخ	6	5	8.5	8	10	5.5	7	7.5	8
ئامادەبووان	213	256	155	194	160	267	258	210	235

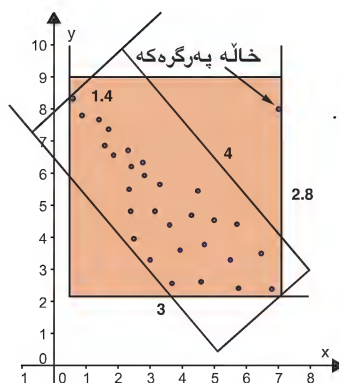
**أ** خالە پروونکردنەوكان بۆ نواندى پىدراوكانى خشتەكە بە بەكارھىنانى نرخ وەك گۆراوى ئازاد بكېشە.

**ب** ئايا پەيوەستى نۆوان دوو گۆراوۋەكە سالبە يان موحەبە؟ ئايا پەيوەستى نۆوانيان بەھىزە يان لاوازە.

**ج** ھاوكېشەى نواندى باشتىن راستەھىل بدۆزەو بە بەكارھىنانى پروونکردنەوۋەى، پروونکردنەوۋەكە بكېشە، پاشان بەھاي كۆلكەى پەيوەست بدۆزەو ئەگەر بژمىرى پروونکردنەوۋەى ھەبوو.

**د** ژمارەى ئامادەبووان لە ئاھەنگىكە بخەملىنەكە نرخی پلىتى چوونە ژوورەو 9 ھەزار دىنار بىت ئەم خەملاندنە چەند وردە.

**فروكەوانى** خشتەى خوارەو درىژى چەند فروكەيەك و پانى دوو بالەكەى دياريدەكات خالە پروونکردنەوكان بكېشە بۆ نواندى پىدراوكانى خشتەكە بە بەكارھىنانى درىژ وەك گۆراوى ئازاد نواندى باشتىن راستەھىلى بكېشە و ھاوكېشەكەى بدۆزەو.



**9** وىنەى بەرامبەر خالە پروونکردنەوكانى ئەو پەيوەندىيە دياردەخات نۆوان تەمەنى قوتابىيەك لە قوناغى بنەرەتى و ئەو كاتەى دەيخايەنيت بۆ بەستنى قەيتانى پىلاوۋەكەى.

**أ** بەنزيكەى بەھاي ھاوكۆلكەى پەيوەست بدۆزەو.

**ب** ئەم خالانە بەھاي پەرگەرەكە دەگرىتەو بەنزيكەى بەھاي كۆلكەى پەيوەست بدۆزەو و پاش لا بردنى خالە پەرگەرەكە (نقطة متطرفه).

**ج** باسى چۆنىەتى كاريگەرى خالە پەرگەرەكە لەسەر ھىزى پەيوەست بكە.

10 لهخشته ى خوارهوه پېدراوهكانى ئهنادامانى تېپىكى توپى باله دهردهكهوئيت كه دريژى ههرهكهيان و دريژى پېى راستيان به سانتيمهترى تېدايه.

دريژى و دريژى پېى راستيان												
29.0	24.5	26	27.5	28.0	29.5	28.0	28.5	31.0	25.0	26.5	27.5	دريژى پېى
181	170	172	179	183	185	180	181	186	172	179	178	دريژى

ا خاله پروونكردنهوهكان دياريبكه كه پېدراوهكانى خستهكه دهنوينن.

ب رېگاي مايهر بهكاربهينه بو دوزينهوى هاوكيشه ى باشتري نواندن بهنزيكه ى.

ج بههاى نزيكه ى هاوكولكه ى پهيوهستى بدوزهوه.

## روانيك بوپيشهوه

هر سيستمىكى هيلى شيكاربكه.

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = -2 \end{cases} \quad 12$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases} \quad 11$$

وانه‌کان

1. شیکارکردنی سیستمه  
هیل‌یه‌کان به سیّ  
نه‌زانراو.
2. پروگرامه هیل‌یه‌کان.
3. لیکنانی ریزکراوه‌کان.
4. هه‌لگه‌پاوهی  
ریزکراوه‌کان.





# شیکارکردنی سیستمه هیلییه‌کان به سیّ Solving Linear systems in 3 unknowns نه‌زانراو



بوچی؟

ده‌توانیت سیستمی 3 هاوکیشی هیلی به سیّ نه‌زانراو به‌کاربیتیت بۆ شیکارکردنی زۆر له پرسیاره‌کانی ژبانی رۆژانه، وه‌ک دۆزینه‌وه‌ی سیستمی نمره به‌رکردنه‌وه‌ی له وه‌رگرتن له کۆلیژه‌کان (نموونه‌ی 2)

نامانجه‌کان

- شیکاره‌کانی سیستمی هیلی به سیّ نه‌زانراو له پروته‌ختی پۆوتانه‌کان ده‌نوینیت.
- سیستمی هیلی به سیّ نه‌زانراو جه‌بریه‌یه شیکاره‌کات.

له پۆله‌کانی پێشوو فیبروویت سیستمی هیلی له دوو هاوکیشه به دوو نه‌زانراو یان سیستمی هیلی  $2 \times 2$  شیکاربه‌کیت، به‌زۆری جار به سیستمی 3 هاوکیشی هیلی به سیّ نه‌زانراو ده‌وتریت سیستمی  $3 \times 3$ ، بۆ دۆزینه‌وه‌ی شیکارکی تاکانه بۆ سیستمی هاوکیشه هیلییه‌کان، به‌گشتی پۆیسته ژماره‌ی هاوکیشه‌کان یه‌کسان بن به ژماره‌ی نه‌زانراوه‌کان. بۆ ئه‌وه‌ی سیستمی  $3 \times 3$  شیکاربه‌کیت پۆیسته بیگۆریت بۆ سیستمی  $2 \times 2$ ، پاشان پێگایه‌کانی شیکارکردنی سیستمی  $2 \times 2$  به‌کاربه‌یتیت که له پۆلی یازده‌دا فیبروویت.

شیکارکردنی سیستمی هیلی 3 هاوکیشه به سیّ نه‌زانراو

پێگای لابردن بۆ شیکارکردنی ئه‌و سیستمه هیلییه‌ی دیت به‌کاربه‌یتیت.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -2 & ① \\ 2x - 2y + z = 7 & ② \\ x + y + 2z = -4 & ③ \end{cases}$$

هه‌نگاوی 1: یه‌کێک له سیّ نه‌زانراوه‌که لایه‌.

وادیاره نه‌زانراوی  $y$  باشتره بۆ لابردن، چونکه هاوکۆلکه‌کانی له دوو هاوکیشی ①

هاوکیشی ① و ② کۆیکه‌وه.

و ② پێچه‌وانه‌ن.

$$\begin{aligned} ① \quad x + 2y - 3z &= -2 \\ ② \quad 2x - 2y + z &= 7 \\ \hline 3x - 2z &= 5 \quad ④ \end{aligned}$$

نموونه



دوو ھاوکیښه‌ی ① و ③ به‌کاربېښنه بۆ د‌و‌زینه‌و‌ی ھاوکیښه‌یه‌کی تر به دوو نه‌زانراوی  $x$  و  $z$ .

ھاوکیښه‌ی ③ له 2- بده و

ھاوکیښه‌ی نه‌نجام له‌گه‌ل

ھاوکیښه‌ی ① کوټکه‌وه.

$$\begin{array}{rcl} ① & x + 2y - 3z = -2 & \rightarrow x + 2y - 3z = -2 \\ ② & -2(x + y + 2z = -4) & \rightarrow -2x - 2y - 4z = 8 \\ & & -x - 7z = 6 \quad ⑤ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ④ \quad \begin{cases} 3x - 2z = 5 \\ -x - 7z = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{نېستا سیستمکې هیڅلی 2x ت هه‌یه} \\ \text{به به‌کاره‌ینانی ل‌بردن شیکاریک‌ه.} \end{array} \end{array}$$

هه‌نگاوی 2: نه‌زانراویکی دیکه ل‌ببه و ھاوکیښه‌ی نه‌نجام شیکاریک‌ه بۆ نه‌و‌ی نه‌زانراوی

سیی‌ه‌مت ده‌ست‌بکه‌و‌یت، نه‌زانراوی  $x$  ل‌ببه.

ھاوکیښه‌ی ⑤ له 3 بده و

ھاوکیښه‌ی نه‌نجام له‌گه‌ل

ھاوکیښه‌ی ④ کوټکه‌وه.

$$\begin{array}{rcl} ④ & 3x - 2z = 5 & \rightarrow 3x - 2z = 5 \\ ⑤ & 3(-x - 7z = 6) & \rightarrow -3x - 21z = 18 \\ & & -23z = 23 \\ & & z = -1 \end{array}$$

هه‌نگاوی 3: یه‌ک‌یک له ھاوکیښه‌کانی سیستمی  $2 \times 2$  به‌کاربېښنه بۆ هه‌ژمارکردنی به‌های  $x$

$$① \quad -x - 7z = 6$$

$$② \quad -x - 7(-1) = 6$$

$$x = 1$$

1- له‌جیاتی  $z$  دابنی:

هه‌نگاوی 4: له جیاتی  $x$  و  $z$  به‌هایه‌کانیان دابنی له‌یه‌ک‌یک له ھاوکیښه‌کانی سیستمه دراوه‌که بۆ

نه‌و‌ی به‌های  $y$  هه‌ژماریک‌ه‌یت.

له‌جیاتی دابنی:

$$① \quad x + y + 2z = -4$$

$$② \quad (1) + y + 2(-1) = -4$$

$$y = -3$$

شیکاری سیستمه‌که بریتییه له  $(1, -3, -1)$

هه‌ول‌بده ریځای ل‌بردن بۆ شیکارکردنی نه‌و سیستمه هیڅلییه‌ی دیت به‌کاربېښنه:

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ -3x - 4y + z = 4 \end{cases}$$

هه‌روه‌ا ده‌توانیت ریځای له‌جیاتیدانان به‌کاربېښت بۆ شیکارکردنی سیستمی هیڅلی  $3 \times 3$ .

لیړه‌ش ده‌توانیت سیستمی  $3 \times 3$  بگوړیت بۆ سیستمی  $2 \times 2$ .

سهرجه‌م	پال‌یوراو	بیرکاری	زانست	زمانی نینگلیزی
700	90	60	70	سوزان
590	60	70	80	نازاد
240	0	60	60	هوشیار

جیبه‌جیکردن له‌سهر پیش‌برک‌ی وەرگرتن

2

نمونه

نه‌وانه‌ی ئاره‌زووی وەرگرتنیان له کول‌یژی نه‌ندان‌یاری

هه‌یه، ده‌چنه ناو پیش‌برک‌ی له 3 بابه‌ت ((بیرکاری و

زانست و زمانی نینگلیزی)) بۆ هه‌ژمارکردنی سهرجه‌می

نمره‌ی پال‌یوراوان، لیژنه‌ی پشکنین پشت ده‌به‌ستیت به نمره

به‌رزکردنه‌و‌ی پال‌یوراوه‌کان له‌هه‌ر بابه‌ت‌یک ((نمره‌که‌ی له ژماره‌یه‌ک دهر‌یت)) له‌وانه‌یه

جیاواز‌ییت له نمره به‌رزی له دوو بابه‌ته‌که‌ی تر، له‌م خشته‌ی به‌رام‌به‌ر نمره‌ی 3 پال‌یوراو له‌سی

بابه‌ته‌که و کو نمره‌ی هه‌ریه‌ک‌یکیان دوا‌ی نمره به‌رزکردنه‌و‌ی دهر‌ده‌که‌و‌یت پیدراوه‌کانی خشته‌که

بۆ د‌و‌زینه‌و‌ی نمره به‌رزی هه‌ر بابه‌ت‌یک به‌کاربېښنه.

ههنگاوی 1: گۆپاوی  $x$  بۆ نمره بهرزی بابتهی بیرکاری و گۆپاوی  $y$  بۆ نمره بهرزی بابتهی زانست و گۆپاوی  $z$  بۆ نمره بهرزی زمانی ئینگلیزی بهکاربهینه به سیستمیکی هاوکیشهکان

$$\left. \begin{array}{l} \text{نمره سوزان} \\ \text{نمره ئازاد} \\ \text{نمره هوشیار} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 90x + 60y + 70z = 700 \quad \textcircled{1} \\ 60x + 70y + 80z = 590 \quad \textcircled{2} \\ 60y + 60z = 240 \quad \textcircled{3} \end{array}$$

تیبینی ئهوهکه، گۆپاوی  $x$  دیارنییه له هاوکیشهی سییه. چونکه هوشیار لهوانهی بیرکاری سفری وهرگرتوه، نهبوونی گۆپاویک هیچ له کارهکه ناگۆرێت، ئهگهر سهیری هاوکیشهی 3 بکهیت، دهتوانیت  $y$  بهپیی  $z$  بدۆزیتهوه ئهه کاره یارمهتیدهره بۆ بهکارهینانی له جیاتیدانان بۆ گۆرینی سیستمهکه بۆ سیستمی هیلی به دوو هاوکیشهی دوو نهزانراو.

ههنگاوی 2: گۆپاوی  $y$  بهپیی گۆپاوی  $z$  به بهکارهینانی هاوکیشهی  $\textcircled{3}$  ههژماربکه.

$$y = 4 - z \quad 60y + 60z = 240$$

ههنگاوی 3: بههای  $y$  له ههردوو هاوکیشهی  $\textcircled{1}$  و  $\textcircled{2}$  دا دابنێ.

$$\begin{cases} 90x + 60(4 - z) + 70z = 700 \\ 60x + 70(4 - z) + 80z = 590 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 90x + 10z = 460 \quad \textcircled{4} \\ 60x + 10z = 310 \quad \textcircled{5} \end{cases}$$

ههنگاوی 4: لابرډن بهکاربهینه بۆ شیکاری ئهه سیستمی دهستکهوتوووه هاوکیشهی  $\textcircled{5}$  له هاوکیشهی  $\textcircled{4}$  دهربکه.

$$90x + 10z = 460 \quad \textcircled{4}$$

$$\begin{array}{r} 60x + 10z = 310 \quad \textcircled{5} \\ \hline 30x = 150 \quad \textcircled{6} \end{array}$$

ههنگاوی 5: ئهه هاوکیشهی دهستکهوتوووه شیکاربکه.

$$30x = 150$$

$$x = 5$$

ههنگاوی 6: بههای  $x$  له هاوکیشهی  $\textcircled{4}$  دا دابنێ بۆ ههژمارکردنی بههای  $z$ .

$$90(5) + 10z = 460$$

$$10z = 10$$

$$z = 1$$

ههنگاوی 7: بههای  $x$  و  $z$  له هاوکیشهی  $\textcircled{1}$  دا دابنێ بۆ ههژمارکردنی بههای  $y$ .

$$90(5) + 60y + 70(1) = 700$$

$$60y = 180$$

$$y = 3$$

شیکارهکه  $z = 1, y = 3, x = 5$  نمره بهرزی بیرکاری 5 و زانست 3 و ئینگلیزی 1 بهرزدهکریتهوه.

ههولبده نمره بهرزکردنهوهی ههر بابتهیک له پېشپړکێ وهرگیران له کۆلیژی پزیشکی به پێی پێدراوهکانی خستهی دیاربکه.

پالێوراو	بیرکاری	زانستهکان	زمانی ئینگلیزی	سهرحهم
شیرین	80	70	50	430
سۆلاف	70	80	0	370
سانا	90	70	80	490

## بەردەوامیون لە بیر کاریدا

ئەو سیستمی دیت سیستمی ئەستەمە، ئایا دەتوانیت بگهیتە ئەو ئەنجامە بێ ئەوەی سیستمەکە شیکاربکەیت؟ پوونییەکەوه.

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ y+2z=3 \\ y+2z=5 \end{cases} \quad 1$$

چۆن سیستمیکی هێلی وەك ئەو سیستمی دیت شیکاردەکەیت.

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ y+2z=3 \\ 5z=5 \end{cases} \quad 2$$

## راهیانانی ئاراستە کراو

پێگای لابردن بۆ شیکارکردنی هەر سیستمیک بەکاربهێنە.

$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+y-z=4 \\ x+y+3z=7 \end{cases} \quad 5 \quad \begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x+3y+2z=5 \\ x+4y-z=-5 \end{cases} \quad 4 \quad \begin{cases} -2x+y+3z=20 \\ -3x+2y+z=21 \\ 3x-2y+3z=-9 \end{cases} \quad 3$$

**6 کارگیری کارەکان** بەرپۆبەرایەتی باخچەى ئازەلان سێ جور پلێت دەفرۆشێت: بۆ منداڵان و نەوجەوانان و تەمەنە گەورەکان. لە خستەى خوارەوه فرۆشتنى پلێتەکانى چوونە ژوورەوه بۆ باخچەکە لە ماوەى 3 کاتژمێر دەردەکەوێت نرخى هەریەك لەسێ جورە پلێتەکە بدۆزەوه.

چوونە ژوورەوه بۆ باخچەى ئازەلان				
کات	گەورەکان	نەوجەوانان	منداڵان	نرخى فرۆشتنەکان بەدینار
16:00 – 15:00	5	10	12	310 000
17:00 – 16:00	5	5	4	155 000
18:00 – 17:00	4	2	3	92 000

## راهیان و جیه جێکردن

پێگای لابردن بۆ شیکارکردنی هەر سیستمیک بەکاربهێنە.

$$\begin{cases} 4x+7y-z=42 \\ -2x+2y+3z=-26 \\ 2x-3y+5z=10 \end{cases} \quad 9 \quad \begin{cases} 5x-6y+2z=21 \\ 2x+3y-3z=-9 \\ -3x+9y-4z=-24 \end{cases} \quad 8 \quad \begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 4x+3y+2z=-4 \\ -3x+2y+5z=-3 \end{cases} \quad 7$$



**10** بۇ خوشى لە پېشېركىي گۇرانىيېزى ئاينىدە: لېزىنەى برپاردان بەپيى 3 پيۈەر «بەهرە و  
وستان لەسەر شانۇ و بەجېھېنان» پېشېركىكەران ھەلدەسەنگىن بۇ ھەريەك لەو پيۈەرەنە  
رېژەيەكى سەدى لە ھەلسەنگاندنى كۆتايى ديارىكراو، لەخشتەى خوارەو ھەلسەنگاندنى  
سى لە پېشېركىكەران دەرەكەوئىت بەپيى ھەر پيۈەرەيەك لەگەل ھەلسەنگاندنى كۆتايى  
ھەريەككىيان. رېژەى سەدى ھەلسەنگاندنى كۆتايى ھەر پيۈەرەك چەندە؟

پېشېركىي گۇرانىيېزى پاشەپۇژ				
پېشېركىكەر	بەهرە	وستان لەسەر شانۇ	بەجېھېنان	ھەلسەنگاندنى كۆتايى
ئاراز	8	9	10	9.2
فيان	9	7	8	8.1
ئاراس	6	10	8	7.8

**11** **وهرزى** لە ميژووى يەككىتى تۇپى سەبەتەى ئەمريكا (لوى دامبىيە) يەكەم كەس بوو كۆى  
خالە تۆماركراوكانى بگا تە 13 726 خال كە دابەشكراو بەسەر ھەلدانى سى خالى و دوو  
خالى و يەك خاليدا. دامبىيە 2 144 خالى لە ھەلدانى دوو خالى زياترە لەو ھەى لە ھەلدانى يەك  
خالى تۆمارىكردو و 1 558 خالى لە ھەلدانى يەك خالى تۆمارىكردو و زياتر لەو ھەى لە  
سى خالى بەدەستەيئاو، چەند خالى لە ھەر جورىك لە ھەلدانەكان تۆمارىكردو.

**12** ئەندازيارىك بۇ دروستكردى ھەرەمىكى بنكە سىگۆشە پيۈستى بە شىكاركردى ئەم  
سىستە دەبىت، يارمەتى ئەندازيارەكە بدە بۇ دۆزىنەو ھەى شىكار.

$$\begin{cases} x + y + z = 53 \\ 3x - 2y + z = 69 \\ -x + 2y - z = -59 \end{cases}$$

**13** كام لەمانەى خوارەو دەبىتە شىكارى سىستى. 
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = -1 \\ 4x + 2y + 3z = 1 \\ x - y + 4z = -6 \end{cases}$$

$$z = -1, y = 1, x = 2$$
 **ج**

$$z = -1, y = -2, x = 2$$
 **ا**  

$$z = 2, y = -2, x = 3$$
 **د**

$$z = -1, y = 2, x = 0$$
 **ب**

**14** سوزان و مىران و ساقان خوشك و بران، تەمەنى سوزان دوو ئەوئەندەى تەمەنى مىرانە، كە  
تەمەنى مىرانىش 12 سال لە تەمەنى ساقان كەمترە، پاش 5 سال تەمەنى ساقان دەبىتە  
دوو ئەوئەندەى تەمەنى مىران تەمەنى ھەريەكەيان چەندە؟

$$سوزان 6 مىران 3 ساقان 15$$
 **ا**

$$سوزان 5 مىران 10 ساقان 22$$
 **ج**  

$$سوزان 34 مىران 17 ساقان 29$$
 **ب**

$$سوزان 14 مىران 7 ساقان 19$$
 **د**

**15** ئەم سىستە شىكارىكە ئەگەر زانیت  $w = 1$ . 
$$\begin{cases} w + 2x + 2y + z = -2 \\ w + 3x - 2y - z = -6 \\ -2w - x + 3y + 3z = 6 \\ w + 4x + y - 2z = -14 \end{cases}$$

## روانىيىك بۆدۈواۋە

ھەريەك لەو سىستىمانە پۇلىنىكە لەنىۋان ئەستەم و سنوردار و بېسنوور.

$$\begin{cases} 7x+y=13 \\ 28x+4y=-12 \end{cases} \quad 16$$

$$\begin{cases} 2x-3y=-15 \\ 3y-2x=15 \end{cases} \quad 17$$

$$\begin{cases} 8y-24x=64 \\ 9y+45x=72 \end{cases} \quad 18$$

## روانىيىك بۆپېشەۋە

بە پرونىكردنەۋەيى سىستىمى لاسەنگەكان شىكارىكە، پاشان 3 خالى ناۋچەي شىكار 19

$$\begin{cases} y+8 \geq 0 \\ 2y+x < 4 \\ x > -6 \end{cases} \quad \text{دىارىكە.}$$

# پروگرامى ھىلى Linear Programming



**بۇچى**  
ئەندازىدارەكانى  
باخچەكان پروگرامە ھىلىيەكان  
بەكاردەھىنن بۇ دىارىكىردنى  
ئەو رووكانەى لەسەر روو  
سەوزەكان دەيانروئىن.

نامانجەكان

• پرسیارەكانى پروگرامى  
ھىلى شىكارەكان.

**زاراۋەكان**  
**Vocabulary**

پروگرامى ھىلى  
Linear programming

مەرج

Constraint

ناۋچەى گونجاۋ

Feasible Region

نەخشەى بەسوود

Objective Function

پروو سەوزەكان، ئەو پرووانەن كە لەجىياتى چىمەتۆ يان قىرمىد، بە پروو كە سەوزەكان داپۆشراۋن بۇ كەمكىردنەۋەى پلەى گەرمى و باشكىردنى جۆرى ھەو. نىخى پروو كەكان و ئەو ھىندە ئاۋەى پىۋىستە و ئەو بىرە دوووم ئۆكسىدى كاربۇنەى پروو كەكان دەيمىز، كاريگەرى لە ھەلپزاردنەكانى پروو كەكان لە لايەن ئەندازىارانى باخچەكان دەكات. پروگرامى ھىلى **Linear programming** پىگايەكە بۇ دۆزىنەۋەى گەورەترىن يان بچوكتىرىن بەھاي نەخشەيەك بەپىي چەند مەرجىك، كە پىي دەوترىت مەرجەكانى پرسیارەكە.

**مەرج Constraint** بىرىتيە لە يەككە لە لاسەنگەكان لە پرسیارى پروگرامى ھىلى. دەتوانىت ئەو كۆمەلە شىكارانەى ھەموو مەرجەكان جىيەجى دەكات بە پروونكىردنەۋەى بنوئىرىت، ئەمەش ناۋچەيەك لە پرووتەختى پۆوتانەكاندا پەيدادەكات و پىي دەوترىت ناۋچەى گونجاۋ يان شىكارەكان **Feasible Region**.

نۋاندنى ناۋچەى گونجاۋ بە پروونكىردنەۋەى: سىروان نەخشەى ئەندازەى باخچەيەك دەكىشيت پرووبەرەكەى لە  $600m^2$  زياتر نەبىت و دوو جۆرە پروو كە بەكاردەھىتت، يەكەم جۆرى پروو كەكە پرووبەرى  $1.2m^2$  دادەپۆشيت، و دوووم جۆرى پروو كەكە پرووبەرى  $2m^2$  دادەپۆشيت، نىخى ھەر پروو كەكە لە دوو جۆرەكە 2500 دىنارە. پىۋىستە تىچوونى پروو كەكان لە يەكە مىليۇن دىنار تىپەپنەكات، مەرجەكان بنووسە و بە پروونكىردنەۋەى ناۋچەى گونجاۋ بنوئە.

ھىماى گۆراۋى  $x$  بۇ ژمارەى پروو كەكانى جۆرى يەكەم و  $y$  بۇ ژمارەى پروو كەكانى جۆرى دوووم دابنى، مەرجەكان بنووسە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

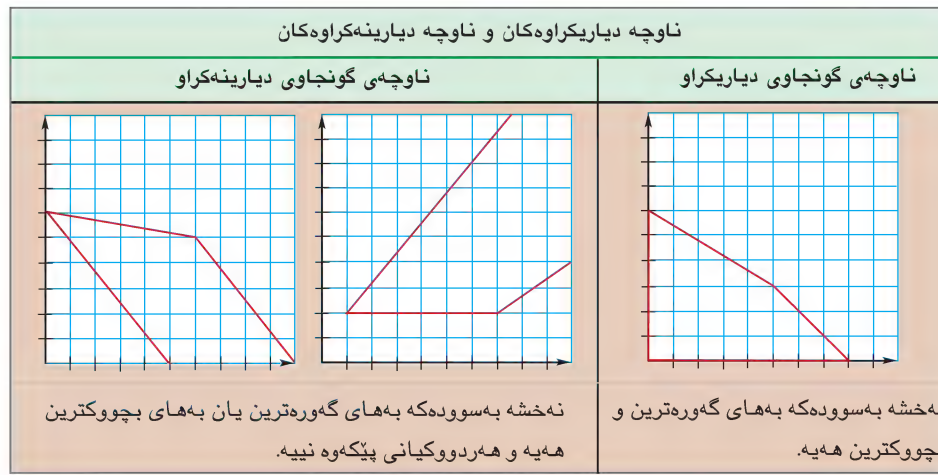
ژمارەى پروو كەكان نايىت سالب بىت  
پرووبەرى داپۆشراۋ لە  $600 m^2$  زياتر نىيە.  
تىچوونى پروو كەكان لە 100 0 000 دىنار زياتر نىيە.

بە پروونكىردنەۋەى ھەموو مەرجەكانى پرسیارەكە شىكارىكە، ئەو ناۋچەيەى يەكتىرىپىنى ھەموو ناۋچە شىكارەكان پىكىدپىنن پەنگ بىكە، ناۋچەى دەستكەوتو (ناۋچەى رەگىراۋ) بىرىتيە لە ناۋچەى گونجاۋ، كە چوارلايەكە خالى سەرەكانى بىرىتيەن لە  $(0, 0)$ ،  $(400, 0)$ ،  $(250, 150)$ ،  $(0, 300)$ . پاسادانېكە: ئەگەر خالىكى ۋەك  $(100, 100)$  ھەلپزىرىت، دەبىنيت پۆوتانەكەى ھەموو مەرجەكان پاساداندەكات. ✓



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases} \quad \text{به پروونکردنه و هېي ناوچه ي گونجاوي بنويښه.}$$

کاتيک پرسپاريکي پروگرامي هيلی شیکارده کي، تنها نواندنې ناوچه ي گونجاو به سوود له پروتختي پوتاندا بهس نييه، زوربه ي کات له سهرت پيوسته بهاي ئه و گوراوانه بدوږيته وه، که و له نه خشه که ده که ن به هوئ ئه و گوراوانه به هايه که ي بکاته گهره ترين يان بچووکترين، بهم جوړه نه خشانه ش دوتريت نه خشه ي به سوود (دالة المنفعة) **Objective Function** به پيئ ناوچه ي گونجاو، ده کريت نه خشه به سووده که گهره ترين يان بچووکترين يان هردووکيان پيکه وه يان هيچيان نه بيت.



ده توانريت به هوئ بيرکاري بالاتره وه، ئه مه ي خواره وه به سلمي نريت: ئه گهر نه خشه يه کي به سوود له پرسپاريکي پروگرامي هيلی گهره ترين يان بچووکترين بهاي هه بيت، ئه و نه خشه که ده کاته ئه و به هايه له سهرت له سهرکانې ناوچه ي گونجاو.

### سهره تاي (مبدأ) لووتکه له پروگرامي هيليدا

ئه گهر نه خشه ي به سوود له پرسپاريکي پروگرامي هيليدا گهره ترين يان بچووکترين بهاي هه بيت، ئه و ئه و نه خشه يه ده کاته ئه و به هايانه له سهرت له سهرکانې ناوچه ي گونجاو.

## نورونه

2

سيروان ئه ندياري باخچه کانه ئه وپه يي گرنکي به راگرتني پاراستني پيسبووني هه و ددات بو گه شتن به و مه به سته، سيروان کار بو نه وه ده کات ژماره ي ئه و پرووه کانه ي زورترين دووهم ئوکسيدي کاربون هه لده مژن گهره ترين بيت، تيکراپيه کاني هه لمژيني دووهم ئوکسيدي کاربون و پيدراوه کاني نمونه ي 1 به کاربهيته بو دوږينه وه ي ژماره ي پرووه که کان له و دوو جوړه.

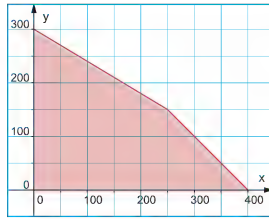




هەنگاوی 1: بری ئەو دووهم ئۆكسىدى كاربۆنەى ھەلدەمژریت بەگۇراوى  $C$  ھىمايكە، بۇ ژمارەى پروەكەكانى جۆرى

يەكەم  $x$  و بۇ ژمارەى پروەكەكانى جۆرى دووهم  $y$

بەكاربەنە، نەخشەى بەسوود بنووسە  $C = 0.7x + 1.05y$



هەنگاوی 2: مەرجهكانى پرسىارەكە بنووسە و ناوچەى گونجاو بنوینە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

هەنگاوی 3: بەھای نەخشەى بەسوود لەھەر سەرئێك لە سەرەكانى ناوچەى گونجاو ھەژمارەكە.

$(x, y)$	$0.7x + 1.05$	$C$
$(0, 0)$	$0.7(0) + 1.05(0)$	0
$(0, 300)$	$0.7(0) + 1.05(300)$	315
$(250, 150)$	$0.7(250) + 1.05(150)$	332.5
$(400, 0)$	$0.7(400) + 1.05(0)$	280

نەخشەى بەسوود لەسەرئێك  $(250, 150)$   
بەھای گەورەترینى ھەيە.

سیروان پېوئستە 250 لە پروەكەكانى جۆرى يەكەم و 150 لە پروەكەكانى جۆرى دووهم برۆئینت بۇ ئەوئى ئەو برە دووهم ئۆكسىدە كاربۆنەى پروەكەكانى باخچەكە ھەلیدەمژن بگاتە ئەوپەرى.

ھەولبەدە گەورەترین بەھا بۇ نەخشەى بەسوودى  $25x + 30y$  ھەلیدەمژن بەپێى ئەم مەرجانەى خوارەو.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

جېبەجێکردنەكان

3

نەوونە

بیسٹون پۆژانە ژەمە خواردنەكان لەناو قوتو نامادەدەكات بۇ قیستىقالیكى نەسپ سوارى بۇ ئەم مەبەستە چەند كریكارىكى پسپۆر و چەند كریكارىكى ناپسپۆرى بەكارھێنا كرى پۆژانەى كریكارىكى پسپۆر 60 000 دینار و كریكارىكى ناپسپۆر 40 000 دینار، بەمەرجێك ئەو كرییەى دەیانداى لە 1 440 000 دینار تیپەرنەكات، بیستون لە بەرامبەر ھەر كریكارىكى پسپۆرىدا 3 كریكارى ناپسپۆرى پېوئستە وتەنھا 16 كریكارى پسپۆرى لایە، كریكارىكى پسپۆر 25 قوتو لە كاتژمێركدا و ناپسپۆر 18 قوتو لە كاتژمێركدا نامادە دەكات ژمارەى كریكارەكان لەھەر جۆرىكە بدۆزەو بۇ ئەوئى ژمارەى ئەو قووتوانەى نامادە دەكرێن گەورەترین بیٹ.

1 پرسىارەكە تیپگە

وەلامەكە لە دوو بەش پێكدیٹ ژمارەى پسپۆرەكان و ژمارەى ناپسپۆرەكان، لیستێك بۇ زانیاریە گرینگەكان دروستبەكە.

- كرى پسپۆر 60 000 دینارە لە پۆژێكدا، كرى نا پسپۆر 40 000 دینارە لە پۆژێكدا.
- بیستون 1 440 000 دینارى دیاریكردووە بۇ ئەوپەرى كرى بۇ كریكارەكان.
- پسپۆرەكە 25 قوتو لە كاتژمێركدا و ناپسپۆرەكەش 18 قوتو لە كاتژمێركدا نامادە دەكات.
- بیستون بۇ ھەر پسپۆرێك 3 نا پسپۆرى پېوئستە.
- تەنھا 16 كریكارى پسپۆرى ھەيە.

## 2 پلان بۇ شىكارەكە دابنى

گۇرپى  $x$  بۇ ژمارەى كرىكارە ناپسپۇرەكان و گۇرپى  $y$  بۇ ژمارەى كرىكارە پسپۇرەكان دابنى مەرجهكانى پرسىارەكەو نەخشەى بەسوود بنووسە. بەپىى زانىارىيە گرنگانەى نووسىوتە.

ژمارەى كرىكارەكان سالب نىيە.

كرىى كرىكارەكان لە 1 440 000 دىنار تىپەپناكات.

بەلايەنى كەم كرىكارىكى پسپۇر بۇ ھەر 3 كرىكارى نا پسپۇر. ژمارەى كرىكارە پسپۇرەكان برىتييە لە 16.

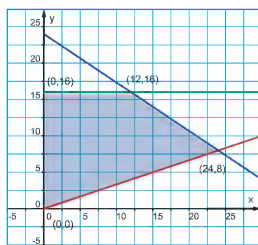
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40000x + 60000y \leq 1440000 \\ y \geq \frac{1}{3}x \\ y \leq 16 \end{cases}$$

گۇرپى  $p$  بۇ ژمارەى قووتو ئەمادەكراوكان لە كاتژمىرەكان دابنى نەخشەى بەسوود برىتييە لە

$$p = 18x + 25y$$

## 3 شىكارىكە

بە پوونكردنەوھى ناوچەى گونجاو و سەرەكان دىارىكە پاشان بەھای نەخشە بە سوودەكە لەھەر سەرىكە ھەژمارىكە.



$$p(0, 0) = 18(0) + 25(0) = 0$$

$$p(0, 16) = 18(0) + 25(16) = 400$$

$$p(12, 16) = 18(12) + 25(16) = 616$$

$$p(24, 8) = 18(24) + 25(8) = 632$$

نەخشەى بەسوود گەورەترین بەھای دەپت لەسەرى (24, 8) دا، پىويستە بىستون 8 كرىكارى پسپۇر و 24 كرىكارى نا پسپۇر بەكاربەيت.

## 4 پوانىنىك بۇ دواو

دلىابە لەوھى جووتە پىخراوى (24, 8) ھەموو مەرجهكانى پرسىارەكە پاسادان دەكات.

$$y \leq 16$$

$$y \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$8 \leq 16 \checkmark$$

$$8 \geq 0 \checkmark$$

$$24 \geq 0 \checkmark$$

$$40000x + 60000y \leq 1440000$$

$$y \geq \frac{1}{3}x$$

$$40000 \times 24 + 60000 \times 8 \leq 1440000$$

$$y \geq \frac{1}{3}(24)$$

$$1440000 \leq 1440000 \checkmark$$

$$8 \geq 8 \checkmark$$

بەپىوھەرى كتىبخانەك دەپوئ دۆلاب بۇ كتىب بكرىت، كتىبخانەكە پىويستى بە 320 m رەفە ھەيە، دۆلابەكانى جوړى يەكەم پىويستيان بە 32 m رەفە ھەيە و نرخەكەى 200 000 دىنارە و دۆلابەكانى جوړى دووھم پىويستيان بە 16 m رەفەى ھەيە و نرخەكەى 125 000 دىنارە. بەپىى پىوانەكانى ھۆلى كتىبخانە بەلايەنى زۆرەو 8 دۆلاب لە جوړى يەكەم و 12 دۆلاب لە جوړى دووھم دىگريت، بەپىوھەرى كتىبخانەكە پىويستە چەند دۆلاب لە ھەر جوړىك بكرىت بۇ ئەوھى كەمترین پارە بدات؟

ھەولبە

## بەردەوامبون لە بیر کاری

1 چۆن مەرجەکانی پرسپاریکی پرۆگرامی هێلی دەردەبریت؟

2 بەپای تۆ بۆچی ناوچە شیکار بە ناوچە گونجاو ناوێرا؟

## راهینانی ئاراستە کراو

بە ڕوونکردنەوەی هەر ناوچەیەک گونجاو دیاریکە.

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ y \geq 0.5x - 2 \\ y \leq -2x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \\ y \leq x + 1 \\ y \leq -\frac{1}{4}x + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x + 3 \\ y \leq -x + 7 \end{cases}$$

بەهایەکانی  $x$  و  $y$  بدۆزەوه کە گەورەترین بەها یان بچووکتەین بەها دەدات بە نەخشە بەسوودەکە.

مەرجەکان	نەخشە بەسوود	گەورەترین بەها یان بچووکتەین بەها
6 مەرجەکانی پرسپاری راهینانی 3	$p = 10x + 16y$	گەورەترین بەها
7 مەرجەکانی پرسپاری راهینانی 4	$p = 3x + 5y$	بچووکتەین بەها
8 مەرجەکانی پرسپاری راهینانی 5	$p = 2.4x + 1.5y$	گەورەترین بەها

9 **پزیشکی ددان** رېبوار پزیشکی ددانە و پۆژانە 7 کاتژمێر کار دەکات، نیو کاتژمێر بۆ ئەو نەخۆشە دادەنێت کە دەیهوێت ددانی پاک بکاتەوه و 40 000 دیناری لێ وەرەگرێت. و کاتژمێرێک بۆ ئەو نەخۆشە دادەنێت کە چارەسەری پووی دەکات و 95 000 دیناری لێ دەودەگرێت. پزیشکەکە دەتوانێت بەلایەنی زۆرەوه 4 نەخۆش لە پۆژیکدا ببینێت کە پۆژانە چارەسەری پوویان دەکەن. ژمارە بارەکانی پاککردنەوەی ددان و ژمارە ئەوانە چارەسەری پوویان دەکەن بدۆزەوه، بۆ ئەوەی زۆرترین داھات بۆ پزیشکەکە دابین بکات.

## راهیان و جێبەجێکردن

بە ڕوونکردنەوەی هەر ناوچەیەک گونجاو دیاریکە و پاسادانی شیکارەکەت بکە.

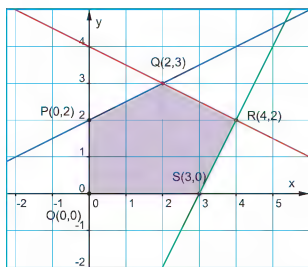
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \geq \frac{1}{5}x - 3 \\ y \leq -x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 9 \\ y \geq -2x - 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 4x - 4 \\ y \leq x + 5 \end{cases}$$

بەهایەکانی  $x$  و  $y$  بدۆزەوه کە گەورەترین بەها یان بچووکتەین بەها دەدات بە نەخشە بەسوودەکە.

مەرجەکان	نەخشە بەسوود	گەورەترین بەها یان بچووکتەین بەها
13 مەرجەکانی پرسپاری راهینانی 10	$p = -21x + 11y$	گەورەترین بەها
14 مەرجەکانی پرسپاری راهینانی 11	$p = -2x - 4y$	بچووکتەین بەها
15 مەرجەکانی پرسپاری راهینانی 12	$p = x + 3y$	گەورەترین بەها

**16** **پیشہ سازی** دہزگای (پووناکی) دوو جوړه پانکه بهرهم دینیت دروستکردنی پانکه له جوړی یهکهم 4 کاترمیر دهخایه نیت و 40 000 دینار قازانچ دهکات، پانکه ی جوړی دووهم 6 کاترمیر دهخایه نیت و 80 000 دینار قازانچ دهکات، هیزی بهرهمه مینانی دامه زراوه که پوژانه 15 پانکه له جوړی یهکهم و 4 پانکه له جوړی دووهم تیپه پناکات، که مترین ژماره ی کاترمیرهکانی کارکردنی له م دہزگایه دا چهنده بو ئه وهی بری قازانجی پوژانه له 400 000 دینار که مترنه بیټ؟

**17** کام خال بهای گه وره ترین ده داته نه خشی به سوودی  $P = -x + y$  له پرسپاریکی پروگرامی هیلی که شیوهی بهرام بهر ناوچه گونجاوه که ی دنوینیت.



R ج

S د

P ا

Q ب

## روانیتیک بو دواوه

له هه ریة که له مانه  $f(7)$  و  $f(-\frac{1}{2})$  هه ژماریکه.

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  **20**

$f(x) = 0.5x$  **19**

$f(x) = \frac{1}{2x - 3}$  **18**

## روانیتیک بو پیشه وه

سنوورده ری هه ریزکراوه یه که بدوژده وه.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  **23**

$\begin{pmatrix} -3 & 45 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$  **22**

$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$  **21**



# ليكدانى ريزكراوهكان Multiplying Matrices



بۇجى؟

خاۋەن دامەزراۋەيەك ريزكراۋەكان بۇ  
دۇنيەۋى دەستكەۋتەكان و تېچۋونەكان  
و قازانچەكان بەكاردەھىتت.

لە پۇلى يازدەدا فيربوويت چۆن ليكدانى ژمارەيەك لە ريزكراۋەيەك بەدەيت ھەرۋەھا دەتوانيت ريزكراۋەيەك لە ريزكراۋەيەكى ديكە بەدەيت، ليكدانى دوو ريزكراۋەكە ريزكراۋەيەكى ديكە پەيدادەكات پېدەوترىت ئەنجامى ليكدانى دوو ريزكراۋە Matrix product بۇ ليكدانى دوو ريزكراۋەكە ئەم دوو پېسايە جېبەجېدەكرىت.

- كاتىك دەتوانيت ريزكراۋەى  $A$  لە ريزكراۋەى  $B$  بەدەيت واتە ھەژمارى  $A \times B$  يان  $AB$  بىكەيت، ئەگەر ژمارەى ستونەكانى  $A$  يەكسان بىت بە ژمارەى ريزەكانى  $B$ .
- ئەنجامى ليكدانى ريزكراۋەيەك جۆرەكى  $m \times n$  لە ريزكراۋەيەك جۆرەكى  $n \times p$  دەكاتە ريزكراۋەيەك لە جۆرى  $m \times p$ .

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$C$   $D$   $CD$   
 $3 \times 2$   $3 \times 5$  پېئاسەنەكراۋە  
ژمارەى ريزەكان  $\neq$  ژمارەى ستونەكان ( $2 \neq 3$ )

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$A$   $B$   $AB$   
 $2 \times 3$   $3 \times 4 \rightarrow 2 \times 4$   
ژمارەى ريزەكان = ژمارەى ستونەكان

زۆرىەى جار نووسىنى  $A_{m \times n}$  بۇ پېشاندانى جۆرى ريزكراۋە لە پلەى  $mn$ .

جياكرەنەۋەى تواناي ليكدانى دوو ريزكراۋە ديارىكە ئايا ئەنجامى ليكدانى دوو ريزكراۋەكە پېئاسەكراۋە يان نا، ئەگەر پېئاسەكراۋە جۆرەكى ديارىكە.

$$C_{4 \times 3} \quad D_{4 \times 5} \quad \text{ب}$$

$C$   $D$   $CD$   
 $4 \times 3$   $4 \times 5$  پېئاسەنەكراۋە  
لەبەرئەۋەى ژمارەى ستونەكانى  
ريزكراۋەى  $C$  يەكسان نىيە بەژمارەى  
ريزەكانى ريزكراۋەى  $D$  ئەۋا ئەنجامى  
ليكدانى  $CD$  پېئاسەنەكراۋە.

$$A_{2 \times 5} \quad B_{5 \times 3} \quad \text{ا}$$

$A$   $B$   $AB$   
 $2 \times 5$   $5 \times 3 = 2 \times 3$   
لەبەرئەۋەى ژمارەى ستونەكانى ريزكراۋەى  
 $A$  يەكسانە بەژمارەى ريزەكانى ريزكراۋەى  
 $B$  ئەۋا ئەنجامى ليكدانى  $AB$  پېئاسەكراۋە،  
وبريتىيەلە ريزكراۋەيەك لەجۆرى  $2 \times 3$ .

ريزكراۋەكانى نمونەى 1 بەكاربېئەنە بۇ ۋەلامدانەۋەى پرسىارەكان، پوونىكەۋە ئايا ليكدانى دوو ريزكراۋەكە پېئاسەكراۋە يان نا ئەگەر پېئاسەكراۋە جۆرەكى ديارىكە.

$DB$  ج

$DC$  ب

$BA$  ا

## نمونە

### پۇشنايى

ئەمەت لەبىرىيىت: بۇ ئەۋەى  
ئەنجامى ليكدانى دوو ريزكراۋە  
پېئاسەكراۋىيىت، پېۋىستە ژمارەى  
ستونەكانى ريزكراۋەى چەپ  
يەكسان بىت بە ژمارەى ريزەكانى  
ريزكراۋەى راست.

ھەۋلبدە

وہک چۆن بۆ دۆزینەوہی ژمارە پیزەکانی پیزکراوہی  $A$  ئاسۆییانە سەیری پیزکراوہکەت کرد و بۆ دۆزینەوہی ژمارە ستوونەکانی پیزکراوہی  $B$  بە ئەستوونی سەیری پیزکراوہکەت کرد بۆ ئەوہی بریار لەو بەدەیت کە لێدان  $AB$  پێناسەکراوہ یان نا. ھەمان کاردەکەیت بۆ ھەژمارکردنی ژمارە دانەکانی ئەنجامی لێکانی دوو پیزکراوہ.

بە وشە	بە ژمارە	بە جەبر
بۆ ھەژمارکردنی دانە $P_{kj}$ لە پیزکراوہی $P=AB$ ھەر دانەیکە پیزی $k$ لە پیزکراوہی $A$ لە دانە بەرامبەرەکە لە ستوونی $j$ بەدە لە پیزکراوہی $B$ , پاشان ئەنجامەکانی ئەو لێکانانە کۆیکەوہ.	$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 d_1 & a_1 c_2 + a_2 d_2 \\ b_1 c_1 + b_2 d_1 & b_1 c_2 + b_2 d_2 \end{bmatrix}$

## نموونه

لێکانی پیزکراوہکان  
 $D = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$   $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

ئەنجامی لێکانەکان ھەژماریکە (ئەگەر پێناسەکراوہ)

**AB**

جۆرەکان بېشکە بۆ ئەوہی بریاربەدەیت کە لێکانەکە پێناسەکراوہ، جۆری پیزکراوہی  $A$  بریتیە لە  $2 \times 3$ ، جۆری پیزکراوہی  $B$  بریتیە لە  $3 \times 2$ ، ئەنجامی لێکانیان  $AB$  پێناسەکراوہ لە جۆری  $2 \times 2$  ە پیزی یەکەمی پیزکراوہی  $A$  لە ستوونی یەکەمی پیزکراوہی  $B$  بەدە وەک لە خواروہ پروونکراوہتەوہ ئەنجامەکە لە شوێنی دانە  $C$  لە پیزکراوہی  $C$  دا بنووسە.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \quad 0(5) + 4(-2) + 9(6)$$

ئێستا پیزی یەکەمی پیزکراوہی  $A$  لە ستوونی دووہمی  $B$  پیزکراوہی بەدە وەک لە خواروہ پروونکراوہتەوہ ئەنجامەکە لە شوێنی دانە  $C_{12}$  لە پیزکراوہی  $C$  دا بنووسە.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ ? & ? \end{bmatrix} \quad 0(1) + 4(7) + 9(0)$$

پیزی دووہمی پیزکراوہی  $A$  لە ستوونی یەکەمی پیزکراوہی  $B$  بەدە وەک لە خواروہ پروونکراوہتەوہ ئەنجامەکە لە شوێنی دانە  $C_{21}$  لە پیزکراوہی  $C$  دا بنووسە.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & ? \end{bmatrix} \quad (-3)(5) + 3(-2) + 2(6)$$

پیزی دووہمی پیزکراوہی  $A$  لە ستوونی دووہمی پیزکراوہی  $B$  بەدە وەک لە خواروہ پروونکراوہتەوہ ئەنجامەکە لە شوێنی دانە  $C_{22}$  لە پیزکراوہی  $C$  دا بنووسە.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} \quad (-3)(1) + 3(7) + 2(0)$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{کەواتە}$$

## ناگاداریه!

تېبىنى ئەو يگە ئەنجامى  
لېكدانى  $AB$  يەكسان نېيە  $BA$   
چونكى سېفەتى ئالوگۇر لە  
لېكدانى رېزىكراوھكان نېيە.

**ب**  $BA$

جۆرەكان بېشكەنە بۇ ئەوھى بېرىرىدەيت كە ئەنجامى لېكدانەكە پېئاسەكراوھ،  
جۆرى رېزىكراوھى  $B$  برىتېيە لە  $2 \times 3$  و جۆرى رېزىكراوھى  $A$  برىتېيە لە  $2 \times 3$   
ئەنجامى لېكدانى  $BA$  پېئاسەكراوھ و لە جۆرى  $3 \times 3$ .

$$BA = \begin{bmatrix} 5(0) + 1(-3) & 5(4) + 1(3) & 5(9) + 1(2) \\ -2(0) + 7(-3) & -2(4) + 7(3) & -2(9) + 7(2) \\ 6(0) + 0(-3) & 6(4) + 0(3) & 6(9) + 0(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 23 & 47 \\ -21 & 13 & -4 \\ 0 & 24 & 54 \end{bmatrix}$$

**ج**  $AD$

جۆرەكان بېشكەنە بۇ ئەوھى بېرىرىدەيت كە لېكدانىيان پېئاسەكراوھ جۆرى رېزىكراوھى  $A$   
برىتېيە لە  $2 \times 3$  و جۆرى رېزىكراوھى  $D$  برىتېيە لە  $2 \times 2$  ئەنجامى  $AD$  پېئاسەكراوھ.

هەولېدە 2. ئەنجامى لېكدانى ئەمانە هەژمارىكە.

$BD$  **ا**  $DA$  **ب**

رېزىكراوھكان بەكارىدېن لە كارگېرى و هەژماركردنى داھاتەكان و تېچوونەكان و قازانجەكان.



جېيەجىكردن لەسەر دەرختە (جرد)

كۆمپانىيەكى پېداوىستى وەرزشى دوو جۆر پۇشاكى پاكردن لە دوو  
كۆگى جىباوزدا دەرۆشرىت خشتەي يەكەم كالاكانى ناو هەردوو  
جۆر پۇشاكەكە دەنۆيىت و دووهمىش نرخى فرۆشتن و تېچوون و  
قازانجى يەكەيەك لە يەكەكانى هەر جۆرىك دەنۆيىت. تېچوونى  
گشتى هەردوو جۆر پۇشاكەكە لە هەر كۆگايەكدا بدۆزەو.

نرخى داھاتەكان و تېچوونەكان و قازانجەكان بە هەزاران دینار			
قازانج	تېچوون	نرخ	
45	44	89	ئاسايى
61	58	119	ناياب

كالەكانى هەردوو كۆگاكە		
ناياب	ئاسايى	
10	14	كۆگای 1
8	7	كۆگای 2

لېكدانى رېزىكراوھكان بەكاربھێنە بۇ دۆزینەوھى داھاتەكان و تېچوونەكان و قازانجەكان بۇ هەر  
كۆگايەك.

$$\begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 89 & 44 & 45 \\ 119 & 58 & 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14(89) + 10(119) & 14(44) + 10(58) & 14(45) + 10(61) \\ 7(89) + 8(119) & 7(44) + 8(58) & 7(45) + 8(61) \end{bmatrix}$$

قازانجەكان تېچوونەكان داھاتەكان

$$= \begin{bmatrix} 2436 & 1196 & 1240 \\ 1575 & 772 & 803 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \text{ كۆگای} \\ 2 \text{ كۆگای} \end{matrix}$$

تېچوونى پېداوىستىيەكان لە كۆگای 1 برىتېيە لە 1196000 دینار و لە كۆگایى 2 دا 772000 دینار.

هەولېدە 3. كالاكانى كۆگای ژمارە 2 بگۆرە 6 لەجۆرى ئاسايى و 9 لەجۆرى ناياب رېزىكراوھى  
ئەنجامى لېكدان هەژمارىكەو قازانجەكانى كۆگای 2 ديارىكە.

پیزکراوہی چوارگوشہیی **Square matrix** ئەو پیزکراوہیہ کہ ژمارہی پیزەکان و ستوونەکانی

یەکسانن پیزکراوہیەکہ لە جۆری  $m \times m$

تیرەیی سەرەکی **Main diagonal** لە پیزکراوہی چوارگوشەیییدا بریتییه لەو تیرەییە کہ گۆشەیی

سەرەو لە چەپ بە گۆشەیی خوارەو لە راست دەگەینێت.

پیزکراوہی یەکہ **Unit matrix** پیزکراوہیەکی چوارگوشەییە هەموو دانەکانی سفرە جگە لە

دانەکانی سەر تیرەیی سەرەکی دەکاتە 1.

یەک پیزکراوہی یەکہ بۆ هەموو جۆریک لە جۆرەکانی پیزکراوہی چوارگوشەیی  $n \times n$  هەیه.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ لە جۆری } 3 \times 3 \text{ بریتییه} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ لە جۆری } 2 \times 2 \text{ بریتییه}$$

لە لیکدانی پیزکراوەکان پیزکراوہی یەکہ لە جۆریکی دیاریکراو پۆلی ژمارە 1 دەبینێت لە لیکدانی

ژمارەکان ئەگەر  $A$  پیزکراوہیەکی چوارگوشەیی بیت لە جۆری  $m \times m$  ئەوا  $AI_m = I_m A = A$ .

$$\text{ئەگەر } A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 7 \times 0 & 5 \times 0 + 7 \times 1 \\ -1 \times 1 + 4 \times 0 & -1 \times 0 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times (-1) & 1 \times 7 + 0 \times 4 \\ 0 \times 5 + 1 \times (-1) & 0 \times 7 + 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A \text{ و}$$

لەبەرئەوەی دەکرێت پیزکراوہیەکی چوارگوشەیی لەخۆی بدرێت، دەتوانرێت ئەم

کردارە چەند جارێک بکریێت و هیزی ئەو پیزکراوہ دەستدەکەوێت.

هیزیەکانی پیزکراوہ چوارگوشەییەکان

نموونه

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ئەگەر دەکرێت هەژماری بکە.

**أ**  $A^2$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 7 + 3 \times (-2) & 7 \times 3 + 3 \times 0 \\ -2 \times 7 + 0 \times (-2) & -2 \times 3 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 21 \\ -14 & -6 \end{bmatrix}$$

**ب**  $B^2$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 4 \times 5 + 1 \times 1 & 2 \times 4 + 4 \times 0 + 1 \times (-1) & 2 \times 1 + 4 \times (-2) + 1 \times 3 \\ 5 \times 2 + 0 \times 5 + (-2) \times 1 & 5 \times 4 + 0 \times 0 + (-2) \times (-1) & 5 \times 1 + 0 \times (-2) + (-2) \times 3 \\ 1 \times 2 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 & 1 \times 4 + (-1) \times 0 + 3 \times (-1) & 1 \times 1 + (-1) \times (-2) + 3 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 7 & -3 \\ 8 & 22 & -1 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

4. ئەگەر دەکرێت هەژماری پیزکراوہی بکە.

**د**  $I^4$

**ج**  $B^3$

**ب**  $A^3$

**أ**  $C^2$



### بەردەوامبۇن لە بیر کاریدا

1 ئەو مەرجە چىيە پۆيىستە ھەبىت لە دوو پىزىراوى  $A$  و  $B$  بۆ ئەوئى بىتوانىن  $AB$  بدۆزىنەو.

2 ئەو ھەنگاوانە پروونىكەو بۆ لىكدانى پىزىراوى  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$  لە پىزىراوى  $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$  پەيرەوى دەكەيت.

### راھبەنى ئاراستە کراو

ئایا ئەنجامى لىكدان پىناسەکراوە یان نا؟ ئەگەر پىناسەکراوە جۆرەكەى دىاربىكە.

$$C_{9 \times 5} D_{5 \times 9} \quad 5 \quad B_{5 \times 3} A_{4 \times 5} \quad 4 \quad A_{4 \times 5} B_{5 \times 3} \quad 3$$

ئەم رىزىکراوانە بەکاربەئىنە بۆ شىکارکردنى راھبەنەکانى 6 تا 9 ئەنجامى لىكدان ھەژمارىكە ئەگەر دەكرىت.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 10 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

BA 6      CA 7      DC 8      BI 9

ئەم رىزىکراوانەى دىن بەکاربەئىنە بۆ شىکارکردنى راھبەنەکانى 10 ھەتا 12 ھەر ھىزىكە ھەژمارىكە ئەگەر دەكرىت.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A<sup>2</sup> 10      A<sup>3</sup> 11      C<sup>2</sup> 12

### راھبەن و جىيە جىکردن

ئایا ئەنجامى لىكدان پىناسەکراوە یان نا. ئەگەر پىناسەکراوە جۆرەكەى دىاربىكە.

$$C_{3 \times 5} D_{5 \times 1} \quad 15 \quad B_{2 \times 3} A_{2 \times 1} \quad 14 \quad A_{2 \times 1} B_{2 \times 3} \quad 13$$

ئەم رىزىکراوانە بەکاربەئىنە بۆ شىکارکردنى راھبەنەکانى 16 تا 19 ئەنجامى لىكدان ھەژمارىكە ئەگەر دەكرىت.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

AB 16      CA 17      BA 18      CI 19

ئەم رېزىكراوانە بەكاربەھىتە بۇ شىكارىكرىنى راھىنانەكانى 20 تا 23 بەسادەترىن شىۋە ئەنجام بنووسە، ئەگەر كرا.

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 13 & -9 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$Q^3$  **23**       $S^3$  **22**       $B^2$  **21**       $S^2$  **20**

**24** بەھای  $x$  بدۆزەۋە، بۇ ئەۋەى يەكسانىيە رېزىكراۋەبىيەكە راست بېت.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & \frac{x}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -19 \\ 24 & -26 \end{bmatrix}$$

## روانىيىك بۆدۈۋە

ھەر بىرىك ھەژمارىكە، ئەگەر دەكرىت.

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.83 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$4T$  **27**       $V - T$  **26**       $S + T$  **25**

## روانىيىك بۆپىشەۋە

**28** سنووردراۋى رېزىكراۋەى  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$  بدۆزەۋە،

ئايادەتوانىت رېزىكراۋەى  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  بدۆزىتەۋەكە پاسادانى  $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  دەكات؟  
پوونىيىكەۋە.

# هەلگەپراوەی ریزکراوەکان Inverse of a matrix



**یوچی**  
 ئەوانەى کار لە کردنەوهى جفرەکاندا دەکەن بۆ دروستکردن و پاراستنى نهێنى نامەکان هەلگەپراوەی ریزکراوەکان بەکاردهيێنن.

دەتوانیت نامەیهك بە جفرە بکەیت بەهۆی ریزکراوەکان. ئەوهی نامەیهى پێدهگات کردارى پێچهوانە بەکاردهيێنێت بۆ کردنەوهى جفرەکه و خۆپندنەوهى نامەکه، بۆ ئەوهى ریزکراوەیهك هەلگەپراوەى هەبێت پێویسته چوارگۆشەى بێت. بەلام ئەم مەرجە تاکە مەرج نییه، چونکه ریزکراوەى چوارگۆشەى هەیه هەلگەپراوەى نییه ئەگەر ئەنجامى لیکدانى ریزکراوەى  $A$  له ریزکراوەى  $B$  یەكسان بێت به ریزکراوەى یەکه  $I$  ئەوا  $AB=BA=I$  لهم بارەدا به ریزکراوەى  $B$  دەوتریت هەلگەپراوەى ریزکراوەى  $A$  **Inverse of a matrix** و به  $A^{-1}$  هیمادهکریت.

دیاریکردنى ئایا ریزکراوەیهك هەلگەپراوەى ریزکراوەیهكى تره.

دیاریبکه ئایا ریزکراوەى  $B$  هەلگەپراوەى ریزکراوەى  $A$  ه.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

لەبەرئەوه ئەنجامى لیکدان بریتییه له ریزکراوەى یەکه، کهواته ریزکراوەى  $B$  بریتییه له هەلگەپراوەى ریزکراوەى  $A$ .

$$B = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

وانەى

4

ئامانجەکان

- بپاردهدات ئایا ریزکراویك هەلگەپراوەى هەیه یان نا.
- دۆزینهوهى هەلگەپراوەى ریزکراوەى  $2 \times 2$  دەدۆزیتەوه ئەگەر هەبێت.
- سیستمى هاوکیشەى هیلى به بەکارهێنانى هەلگەپراوەى ریزکراوه دەدۆزیتەوه.

زاراوەکان

Vocabulary

هەلگەپراوەى ریزکراوه

Inverse of a matrix

هاوکیشەى ریزکراوهیى

Matrix equation

ریزکراوەى نەزانراوەکان

Variable matrix

ریزکراوەى نەگۆڕمەکان

Constant matrix

نموونه

بەبیرهێنانەوه

ریزکراوەى یەکه لهجۆرى  $n$  بریتییه له ریزکراوهیهكى چوارگۆشەى جۆرى  $n$ ، که هەموو دانەکانى سفره جگه له دانەکانى تیرهى سەرەكى که هەموو یان 1 ن، ریزکراوەى یەکه جۆرى 3 بریتییه له :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بەپېی ئەو پېشور پېزکراوې  $B$  ھەلگەپراوې پېزکراوې  $A$  نىيە.

ھەولبەدە ديارىبکە ئاىا پېزکراوې  $B$  ھەلگەپراوې پېزکراوې  $A$  ە.

$$B = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.4 \\ 1.2 & 1 & -1.4 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ھەلگەپراوې رېزکراوې چوارگۆشەيى لە پلە 2

ئەگەر سنووردەرى پېزکراوې  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  سفر نەبىت، ئەوا ئەو پېزکراوې ھەلگەپراوې ھەيە و برىتييە لە  $M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  (كاتىك  $M$  سنووردەرى رېزکراوې  $M$ ) ە

ئەو پېزکراوې سنووردەرى سىفرە ھەلگەپراوې نىيە.

ھەلگەپراوې پېزکراوې چوارگۆشەيى پلە دوو ئەگەر ھەبوو ھەلگەپراوې ئەو پېزکراوې بدۆزەدە.

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

ھەژمارى سنووردەرى پېزکراوې بکە.

$$|M| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - 2 \times 3 = 2 \neq 0$$

لەبەرئەو سىنوردەرى پېزکراوې سفر نىيە ئەوا ھەلگەپراوې ھەيە.

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

ھەژمارى سنووردەرى پېزکراوې بکە.

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 12 - 2 \times 3 = 0$$

لەبەرئەو سىنوردەرى پېزکراوې سىفرە، ئەوا ھەلگەپراوې نىيە.

## غونە

### پۇشنايى

بۇ دەستەوتنى رېزکراوې

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ لە رېزکراوې } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$a$  و  $d$  ئالوگۆر بکە و نىشانەي دوو دانەكەي تر بگۆرە.

ھەولبەدە ھەلگەپراوې پېزکراوې  $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  بدۆزەدە.

دەتوانىت پېزکراوېكان بەكاربەيىت بۇ شىكارکردنى سىستىمى ھاوکیشە ھىلپىيەکان، بە بەکارھىنانى پېزکراوېكان. شىکارکردنى ھاوکیشەکان دەگۆردىت بۇ کردارىک وەك شىکارى ھاوکیشەي ھىلپى  $5x = 20$  بە لىکدانى  $\frac{1}{5}$  ھەردوو لای ھاوکیشەکە لە ھەلگەپراوې ھاوکیلکەي 5 واتە. بۇ جىبەجىکردنى ئەم کارە سىستەمى ھاوکیشەکان دەگۆرپىت بۇ

ھاوکیشەي پېزکراوېي **Matrix equation**  $AX=B$  کاتىك  $A$  ھىماي رېزکراوې ھاوکیلکەکانى سىستەمەکە بىت و  $X$  ھىماي پېزکراوې نەزانراوېكان **Variable matrix** بىت و ھەروەھا  $B$  ھىماي پېزکراوې نەگۆرەکان **Constant matrix** بىت.



ئەو ھاوکیڭشە پیزکراویدیەیی کە سیستمی دوو ھاوکیڭشەیی ھێڵی  $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$  دەنویڤیت، بریتیە لە

$$A \cdot X = B$$

پیزکراویدی نەگۆرەکان  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$  پیزکراویدی ھاوکیڭشەکان

پیزکراویدی نەزانراوەکان

بۆ شیکارکردنی ھاوکیڭشەیی پیزکراویدی  $AX=B$  ھەردوو لای ھاوکیڭشەکە لە ھەلگەپراویدی پیزکراویدی  $A$  بدە (گريمان بکە ھەلگەپراویدی ھەبە).

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ئەنجامی لیکدانی پیزکراویدی  $A$  لە ھەلگەپراویدی بریتیە لە

$$IX = A^{-1}B$$

پیزکراویدی یەکە  $I$ .

$$X = A^{-1}B$$

3

نموونه

شیکارکردنی سیستمی ھاوکیڭشە ھێڵییەکان بە بەکارھێنانی ھەلگەپراویدی پیزکراویدی. ئەو ھاوکیڭشە پیزکراویدیەیی سیستمی ھێڵی  $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$  دەنویڤیت بنووسە، پاشان شیکاریکە.

ھەنگاوی 1: ئەو ھاوکیڭشە پیزکراویدیەیی سیستمی دوو ھاوکیڭشەکە دەنویڤیت بنووسە.

$$A \quad X = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ھەنگاوی 2: سنووردەری پیزکراویدی ھاوکیڭشەکان بدۆزەو.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1 \neq 0$$

ھەنگاوی 3: ھەلگەپراویدی پیزکراویدی ھاوکیڭشەکان بدۆزەو.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ھەنگاوی 4: شیکاریکە.

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

کەواتە شیکار:  $x = -7$  و  $y = 15$ .

ھەولبە 3. ئەو ھاوکیڭشە ریزکراویدیەیی سیستمی ھێڵی  $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$  دەنویڤیت بنووسە، پاشان شیکاریکە.

راھێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

ئەنجامی لیکدان بنووسە بۆ ئەو دی کرداری لیکدانی دوو ریزکراویدە ئەنجام بدەنت.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ب} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ا} \quad \text{1}$$

رێگایەك بۆ بەکارھێنانی سنووردەری پیزکراویدی باسبکە. 2

## راهبانی ئاراسته کراو

دیاریبکه نایا ریزکراوهی یهکهه ههگهراوهی ریزکراوهی دووهمه.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

3

ههگهراوهی ریزکراوهکه بدۆزهوه (ئهگهر ههیبیت).

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

7

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

6

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

5

سیستمی هاوکیشنهکان بهشیوهی ریزکراوهیی بنووسه.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

9

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

8

## راهبان و جیهجکردن

دیاریبکه نایا ریزکراوهی یهکهه ههگهراوهی ریزکراوهی دووهمه.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

11

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

10

ههگهراوهی ریزکراوهکه بدۆزهوه (ئهگهر ههیبیت).

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

14

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

13

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

12

سیستمی هاوکیشنهکان بهشیوهی ریزکراوهیی بنووسه.

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

16

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$$

15

17 **ههنگاوی جۆراوجۆر** یانهی ههندرین گهشتیکی دهريایی پڤخست که 7 بهلهمی تیدا

بهکارهاتبوو که دوو جۆربوون، جۆری گهوره 6 کهسی دهگرت و جۆری بچووک 2 کهسی دهگرت،

وژمارهی گهشتکهراان 34 کهس بوو، پرسیارهکه به سیستمی هیللی  $\begin{cases} 6x + 2y = 34 \\ x + y = 7 \end{cases}$  دهردهبرپیت،

کاتیك  $x$  هیمای ژمارهی بهلهمه گهورهکانه و  $y$  ژمارهی بهلهمه بچووککانه.

ا ریزکراوهی هاوکۆلکهکان بنووسه؟

ب سیستمهکهی پيشو بهشیوهی ریزکراوهیی بنووسه؟

ج ههگهراوهی ریزکراوهی هاوکۆلکهکان بنووسه.

د شیکاری هاوکیشنهکان ریزکراوهیهکه بکه بو دۆزینهوهی ژمارهی بهلهمهکانی هه جۆریک؟

18 **ههله له شیکارکردن** ههريهک له شوان و ساقان ههگهراوهی ریزکراوهی  $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$  یان ههژمارکرد کامیان ههلهیان کردووه؟ و ههلهکه دیاریبکه.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ساقان}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{شوان}$$

**19** **بۇ خۇشى** باوكت پىي راگەياندى كە 5000 دىنار لە گىرفانىدايە، پىكھاتووہ لە پارچەي 50 دىنارى و 100 دىنارى ئو برە پارەيەت دەداتى ئەگەر بزانيٹ چەند پارچە لەھەر پارچەيەك لە گىرفانىدايە، بۇ يارمەتيدانت پىي ووتى ژمارەي پارچەكان ھەمووي 73 پارچەيە، ھەلگەپاوي ريزكراوہ بەكاربھيئە بۇ بردنەوي 5000 دىنارەكە.

**20** بۇچوونە ژوورەوہ بۇ باخچەي ئازەلان شىژزاد 24 000 دىنارى دا لە برى 7 بليتي مندالان و 2 بليتي گەوران، مازن 46 000 دىنارى دا لە برى 4 بليتي گەوران و 13 بليتي مندالان، نرخى بليتي گەورە بە نەزانراوي  $x$  ھيمايكە و نرخى بليتي مندالان بە نەزانراوي  $y$  ھيمايكە.

- ا) بەھوي سيستمى ھاوكيشەكان ئەم پرسيارە دەرېبرە.  
ب) نايان سئووردەري ريزكراوہي ھاوكۇلكەكان يەكسانە بە سفر؟ ژمارەي شيكارەكانى چەندە؟  
ج) شيوہي ريزكراوہي و ھەلگەپاوي ريزكراوہ بەكاربھيئە بۇ دۇزينەوي  $x$  و  $y$ .  
د) نرخى بليتي گەورە چەندە؟ نرخى بليتي مندالان چەندە؟

## روانيك بۇدواوہ

**21** رېگاي لابرەن بۇ شيكارکردنى سيستمى ھاوكيشەكان بەكاربھيئە

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y - 6z = 5 \\ -4z - 5y + 0.25z = -9 \end{cases}$$

## روانيك بۇپيشەوہ

**22** پوونکردنەوي نەخشەي  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$  بكيشە و پۇوتانى سەرەكەي دياريكە.



# نہخشہ کان

Functions

بہشی

3

## وانہ کان

1. نہخشہ پادہ دارہ کان
2. نہخشہ کانی گوپان
3. نہخشہ توانیہ کان
4. نہخشہ لوگاریتمیہ کان







# نەخشە پادەدارەکان

## Polynomial Functions

بۆچی؟

بۆزىشك دەتوانىت  
نەخشە پادەدارەكان  
بەكارىيەتتە بۆ  
دروستکردنى  
نمۇنەيەك بۆ ناردنى  
خوین لەدەمارەكان

لەھەردوو پۆلى دە و یازدەدا نەخشە ھێلایەكانت خویند، كە بە شێوەی  $f(x) = ax + b$  دەنوسرین  
كاتێك  $a \neq 0$ ، و نەخشە دووجا بەشێوەی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  دەنوسریت كاتێك  $a \neq 0$   
لەم پۆلەشدا نەخشە سیجاییەكان و بەشێوەیەکی گشتی نەخشە پادەدارەكان دەخوینن.

### نەخشە سیجاییەكان

نەخشە سیجاییەكان بریتین لەو نەخشانەى بەشێوەی

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a \neq 0$$

دەتوانیت ئەو نەخشانە بەھێنیتە بەرچاوی خۆت كە بەشێوەی  $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$   
دەنوسریت كاتێك  $a_n \neq 0$  یان بەشێوەیەکی گشتی  $h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$   
بەنەخشەى  $g$  سەرەو دەوتریت نەخشەى پادەدار بەپلە چوار، و بە  $h$  دەوتریت نەخشەى  
پادەدار بە پلەى  $n$ .

### جێبەجێکردنى پزىشكى

پزىشكەكان برى ئەو خوینەى دڵ دەینىریتە بۆریەكانى خوین دەپۆن، بەھۆى تێکردنى شلەىەكى  
رەنگاوپرەنگ لەخوینبەرێك لەنزىك دڵ بەھۆى دەرزىيەك، پاشان پێوانى برى ئەو ماددەىەكە لەناو  
بۆریەكانى خوین پەرت دەبیت، نەخشەى  $f(t) = 0.0056t^3 - 0.22t^2 + 2.33t$  نموونەىەك  
پێكدەھێنیت بۆ پێوانى ماددە رەنگاوپرەنگەكە (بە ملگم لە لیترێك) لەناو خوین بەپێى كات  $t$   
(بەچركە لە  $0 \leq t \leq 23$ ) كە كاتى تێپەرپووە لە تێئاخنىنى ماددە رەنگاوپرەنگەكە.

أ بهای  $f(t)$  لە  $t=0$  و  $t=3$  بدۆزەو.

ب ھەر بەھایەك چى دەردەپریت، باسبە.

شیکار

$$f(0) = 0.0056(0)^3 - 0.22(0)^2 + 2.33(0) = 0$$

$$f(3) = 0.0056(3)^3 - 0.22(3)^2 + 2.33(3) = 5.1612$$

وانەى  
1

### نامانجەكان

- نەخشەى سیجا دەناسنیت.
- نەخشەى پادەدار دەناسنیت.
- پرونکردنەوێ نەخشە
- پادەدارەكان دەكێشیت.
- ئەو پرسىارنە شىكارەكات
- كە نەخشە پادەدارەكان
- لەخۆدەگرن.
- بەھایەكانى ئەوپەرى
- خۆجیى دەناسیت.

### زاراوەكان

#### Vocabulary

- نەخشەى سیجا
- Cubic function
- نەخشەى پادەدارەكان
- Polynomial function
- پلەى نەخشەى پادەدار
- Degree of a
- Polynomial function

### نمونه

- پوو لەزیادبوون Increasing
- پوو لەكەمبوون Decreasing
- خالى شلۆق Turning point
- بەھای گەورەترین خۆجیى Local maximum
- بەھای بچووكترىن خۆجیى Local minimum
- بەھای ئەوپەرى خۆجیى Local extremum

ب) ھېندى  $f(0)$  رېژەى ماددە رەنگراۋەكە (بە ملگم لە لىترىك) لەخوڤن دەنوڤنڤت لەسەرەتاي پېدانى ماددە رەنگراۋەكە بەلام  $f(3)$  رېژەى ماددە رەنگراۋەكە (بە ملگم لە لىترىك) لەخوڤن دەنوڤنڤت پاش تېپەپوونى 3 چركە لەپېدانى ماددەكە.

ھەولبەدە

بۇ نەخۆشكى تر، نەخشەى  $f(t) = 0.000468t^4 - 0.016t^3 + 0.095t^2 + 0.806t$  نموونەيەكە بۇ پېوانى ماددە رەنگراۋەكە بە (ملگم لە لىتر) لەخوڤن بەپېى كاتى تېپەپوو ( $t$  بە چركە) بەسەر پېدانى ماددە رەنگراۋەكە. بەھاي  $f(t)$  لە  $t = 4$  و  $t = 17$  بدۆزەدە. ھەر بەھايەك چى دەگەيەنڤت، باسيكە.

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

كېشانى پوونكرنەوھىي نەخشەى سىجا نەخشەى  $f(x) = x^3 - 3x$  بەكاربھيئە.

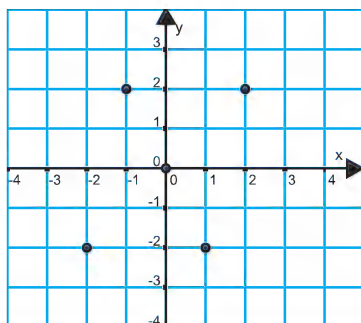
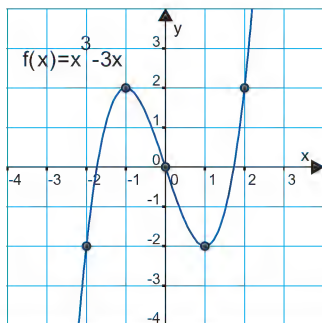
ا) خستەى بەرامبەر تەواۋيكە.

ب) لەپووتەختى پووتانەكان، خالاکانى  $(x, f(x))$  دياريكە كە لە خستەكەدا ھاتوۋە.

ج) ئەم خالانە بە چەماۋيەكى گونجاۋ بېستەوۋە.

شېكار

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2



ھەولبەدە نەخشەى  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$  بەكاربھيئە.

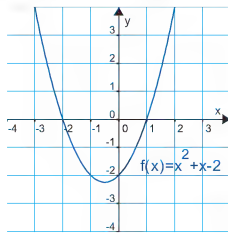
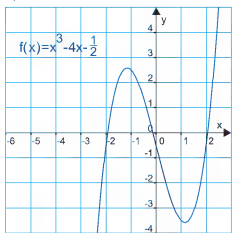
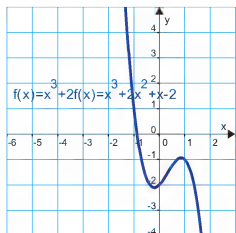
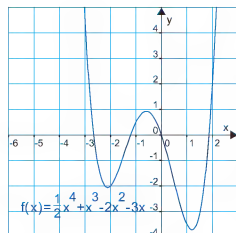
ا) خستەى بەرامبەر تەواۋيكە.

$x$	-3	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	3
$f(x)$	-3						10

ب) لەپووتەختى پووتانەكان، خالاکانى  $(x, f(x))$  دياريكە كە لە خستەكەدا ھاتوۋە.

ج) ئەم خالانە بە چەماۋيەكى گونجاۋ بېستەوۋە.

چالاکى سەرنجى ئەم نەخشەى خواروۋە و پوونكرنەوھكانيان بدە.



$$k(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x \quad h(x) = -2x^3 + 2x^2 + x - 2 \quad g(x) = x^3 - 4x - \frac{1}{2} \quad f(x) = x^2 + x - 2$$

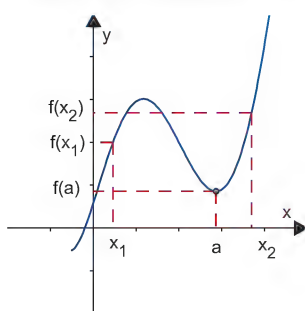
نەخشە	پلە	ژمارە
$f$	2	1
$g$		
$h$		
$k$		

خشتەى بەرامبەر تەواوبكە، ژمارەى خالە شلۆقەكانى پوونكرندنەوى ھەر نەخشەىك لەسەر كەوتن بۆ دابەزىن و بە پېچەوانە ديارىكە.

### بەھاكانى ئەوپەرى نەخشەى رادەدارەكان

كاتىك وینەى پوونكرندنەوى نەخشەىك بەرەو سەرەو دەچىت پاشان لىژ دەبىتەو بەرەو خوارەو لەماوئەكى بوارەكەيدا. نەخشەكە بەھاى گەرەتەىن خۆجى **Local Maximum** وەرەگرىت لەو ماوئەيدا. بەلام ئەگەر پوونكرندنەوى نەخشەىك بۆ خوارەو لىژبىتەو پاشان بەرەو سەرەو بەرزبىتەو لەماوئەكى بوارەكەيدا ئەوا نەخشەكە بەھاى بچوكتەىن خۆجى **Local Minimum** دەبىت لەو ماوئەيدا.

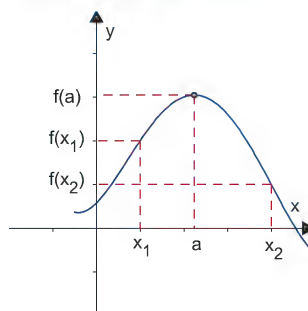
بەھاى بچوكتەىن خۆجى



ئەگەر  $x \neq a$  لەماوئەى نىوان  $x_1$  و  $x_2$  ئەوا

$$f(x) > f(a)$$

بەھاى گەرەتەىن خۆجى



ئەگەر  $x \neq a$  لەماوئەى نىوان  $x_1$  و  $x_2$  ئەوا

$$f(x) < f(a)$$

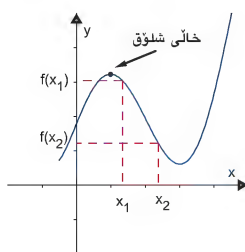
### بەھاىەكانى ئەوپەرى

بەژمارەى  $f(a)$  دەوترىت بەھاى گەرەتەىن خۆجى ئەگەر  $f(x) < f(a)$  بەھاى  $x$  ھەرچەندبىت لەماوئەى  $a$  كاتىك  $x \neq a$ .

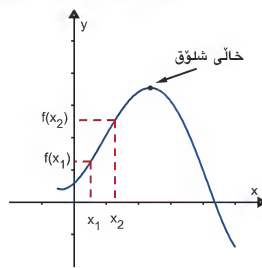
بەژمارەى  $f(a)$  دەوترىت بەھاى بچوكتەىن خۆجى ئەگەر  $f(x) > f(a)$  بەھاى  $x$  ھەرچەندبىت لەماوئەى  $a$  كاتىك  $x \neq a$ .

بەژمارەى  $f(a)$  دەوترىت بەھاى ئەوپەرى خۆجى ئەگەر بەھاى گەرەتەىن خۆجى يان بەھاى بچوكتەىن خۆجى بىت.

بەوردى سەرنجى ھەردوو وینەى خوارەو بدە. تىبىنىكە كە پوونكرندنەو كە لەوانەى بەرەو سەرەو يان بەرەو خوارەو بىت. بەنەخشەىك دەوترىت پوولەزىادبوونە لەماوئەىكى بوارەكەيدا، ئەگەر پوونكرندنەو كەى بەرەو سەرەو بىت لەو ماوئەيدا. ھەرەھا بەنەخشەىك دەوترىت پوولەكەمبونە لەماوئەىكى بوارەكەيدا، ئەگەر پوونكرندنەو كەى لەو ماوئەيدا بەرەو خوارەو بىت.



ئەگەر  $x_1 < x_2$  لەماوئەى پوولەكەمبون، ئەوا  $f(x_1) > f(x_2)$ .

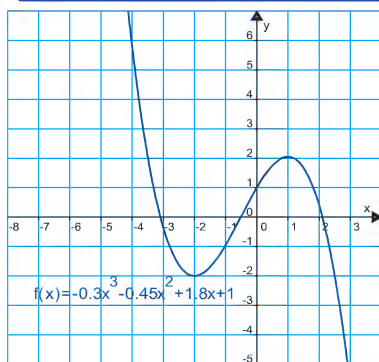


ئەگەر  $x_1 < x_2$  لەماوئەى پوولەزىادبوون، ئەوا  $f(x_1) < f(x_2)$ .

بەخالەکانی پوونکردنەوهی بەهای ئەوپەری خۆجی دەوتریت خالە شلۆقەکان لەپێرەوی نەخشەکە. نەخشەکە لەکاتی تێپەربوونی بەو خالانەدا لە پوولەزیادبوون بۆ پوولەکەمبوون دەگۆڕێت و بە پێچەوانەوه. نەخشە سێجا دوو خالی شلۆقی بەلایەنی زۆری هەیە. بەلام نەخشە پلەچوار بەلایەنی زۆری 3 خالی شلۆقی هەیە. بەشیوەیهکی گشتی، ژمارە خالە شلۆقەکانی نەخشەیهکی پادەدار لە پلە  $n$  بریتیە لە  $n-1$  بەلای زۆری.

### پوولەزیادبوون و پوولەکەمبوونی نەخشەکان

$x_1$  و  $x_2$  دوو ژمارەن ماوهیهکی بواری نەخشە  $f(x)$ .  
نەخشەکە پوولەزیادبوون دەبێت لەوماویەدا ئەگەر ئەم مەرجه پاسادان بکات:  
ئەگەر  $x_1 < x_2$  ئەوا  $f(x_1) < f(x_2)$ .  
نەخشەکە پوولەکەمبوون دەبێت لەوماویەدا ئەگەر ئەم مەرجه پاسادان بکات:  
ئەگەر  $x_1 < x_2$  ئەوا  $f(x_1) > f(x_2)$ .



سەرئەنجامی پوونکردنەوهی بەرامبەر بەدە کە نەخشە

$$f(x) = -0.3x^3 - 0.45x^2 + 1.8x + 1 \text{ دەنۆینێت.}$$

ا ژمارە خالە شلۆقەکانی ئەم پوونکردنەوه چەندە؟

ب ژمارە بەهایەکانی ئەوپەری خۆجی چەندە و

جۆری هەریەکیان چیه؟

ج هەموو بەهایەکانی ئەوپەری خۆجی و بەهای  $x$  ه

کانیان بدۆزەوه؟

د ماوهکانی پوولەزیادبوون و پوولەکەمبوونی ئەو نەخشە دیاریبکە.

شیکار

ا نەخشەکە، وەک لەپوونکردنەوهکەیدا دیارە، دووخالی شلۆقی هەیە،  $(-2, -2)$  و  $(1, 2)$ .

ب نەخشەکە دوو بەهای ئەوپەری خۆجی هەیە، یەکەمیان گەورەترینە لە  $(1, 2)$

دا و دووهمیان بچووکتترینە لە  $(-2, -2)$ .

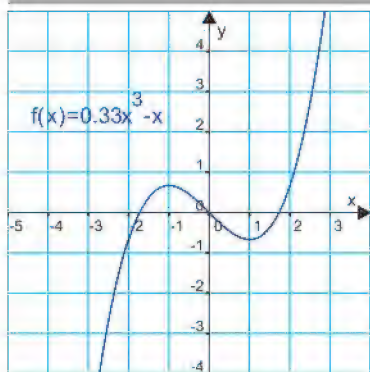
ج بەهای ئەوپەری لە  $(-2, -2)$  بەهای بچووکتترین خۆجی و دەکاتە  $-2$  و بەهای  $x$  بریتیە لە

$x = -2$ . و بەهای ئەوپەری لە  $(1, 2)$  دا بەهای گەورەترین خۆجی و دەکاتە  $2$  و  $x$  بریتیە لە

$x = 1$ .

د نەخشەکە پوولەکەمبوونە کاتیەک بەهای  $x$  لە  $-2$  کەمتر دەبێت یان کاتیەک لە  $1$  گەورەتر

دەبێت. بەلام پوولەزیادبوونە کاتیەک بەهای  $x$  لەنیوان  $-2$  و  $1$  بێت.



سەرئەنجامی پوونکردنەوهی نەخشە  $f(x) = 0.33x^3 - x$  بەدە

کە لە بەرامبەردا دەرەکەوێت.

ا ژمارە خالە شلۆقەکانی ئەو نەخشە چەندە؟

ب ژمارە بەهایەکانی ئەوپەری خۆجی چەندە و

جۆرەکانیان دیاریبکە.

ج هەموو بەهایەکانی ئەوپەری خۆجی و بەهای  $x$  ه

کانیان بدۆزەوه.

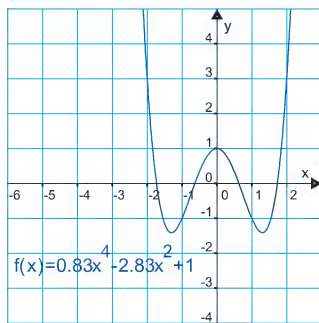
د ماوهکانی پوولەزیادبوون و پوولەکەمبوون دیاریبکە.

### نموونه

3



## بهرده وامبوون له بیر کاریدا



1 باسی ئەو نهخشه رادهداره بکه که پروونکردنهوهی

له بهرامبهر دهردهکهوئیت.

2 بههای گه ورهترین و بههای بچووکتترین خوجیی

پیناسه بکه.

3 پرووله زیادبوون و پرووله کهمبوونی نهخشه له ماوهیه که

پیناسه بکه.

## راهینانی ئاراسته کراو

4 پلهی ههر نهخشهیهکی رادهدار بدۆزهوه.

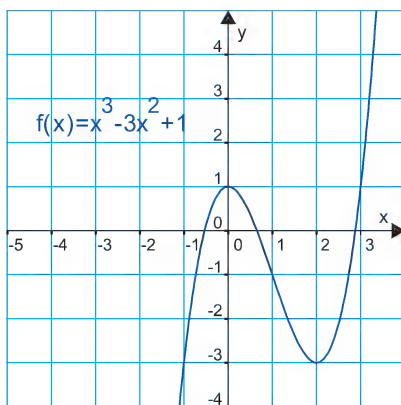
ب  $g(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x - 1$

ا  $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x - 1$

د  $k(x) = 3x^2 + 2x^6 - 4x^4 - 1$

ج  $h(x) = 6x - 4x^4 + x^7$

له وینهی بهرامبهر پروونکردنهوهی نهخشه  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  دهردهکهوئیت.



5 ژمارهی خالّه شلۆقهکانی نهخشه که چهنده؟

6 ژمارهی بههاکانی ئهوپه پری خوجیی چهنده و

جوړهکانیان چیه؟

7 بههایهکانی ئهوپه پری خوجیی و بههای  $x$  ه

کانیان بدۆزهوه.

8 ماوهکانی پرووله زیادبوون و پرووله کهمبوونی

نهخشه که دیاربکه.

9 نهخشه  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$  بهکار بهینه.

ا خشتهی بهرامبهر تهواوبکه.

ب له پرووتهختی پۆتانهکان

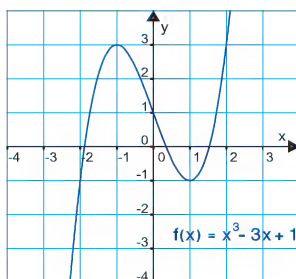
خالهکانی  $(x, f(x))$  که له

خشته کهدا هاتوه دیاربکه.

ج ئەو خالانه به چهماوهیهکی گونجاو بهستهوه.

## راهیان و جیه جیکردن

له وینهی بهرامبهر پروونکردنهوهی نهخشه  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  دهردهکهوئیت.



10 ژمارهی خالّه شلۆقهکانی نهخشه که چهنده؟

11 ژمارهی بههاکانی ئهوپه پری خوجیی چهنده و

جوړی ههریهکیان چیه؟

12 بههایهکانی ئهوپه پری خوجیی و بههای  $x$  ه کانیان بدۆزهوه.

13 ماوهکانی پرووله زیادبوون و کهمبوونی نهخشه که دیاربکه.

## روانين بۆدواوه



14 خشتهى خوارده تەواوبكە بە ھەژمارکردنى بەھايەكانى نەخشەى  $g(x) = x^2 - 2x - 2$ .  
بچوكترين بەھايە نەخشەى  $g$  چيە و بەھايە  $x$  ەكەى دياربكه.

$x$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$g(x)$									

## روانين بۆپيشهوه



15 لەخشتهى بەرامبەر كاتى پيوست  $t$  بە كاتژمير  
بۆپرینى ماوهى 600 كم دەردهكهوئ، بەپي  
خیرایی  $s$  بە كم لەكاتژميرك، خشتهكه تەواوبكه و  
دەرئەنجامى پەيوەندىيەك بكە كه دووگۆراوى  $t$  و  $s$   
بەيەكهوه دەبەستێتەوه.

خیرایی	كات	دووری
30	20	600
40		
50		



## نەخشەكانى گۆرۈن Variation Functions

بۇچى

دەتوانىت نەخشەنى گۆرۈن  
بەكاربەيتىت بۇ دىيارىكرىنى  
ژمارەنى ئەو كەسانەنى پىئوستىن  
بۇ جىبەجىكرىنى كارىك وەك  
دروستىكرىنى خانوويەك لە  
كاتىكى دىيارىكراودا.

زۇرچار دوو ھىند بەپەيوەندىيەكى گۆرۈن بەيەكەو دەبەستىرنەو، گۆرۈن بەھائى يەككىيان گۆرۈن بەھائى ئەوى تریان دىيارىدەكات. كاتى پىئوست بۇ برىنى دوورى نىوان ھەولېر و بەغداد بۇ نمونە بەخىرايى ئەو ئۆتۆمبىلە دەبەستىرنەو كە لە ھەولېر بۇ بەغداد دەپوات. ئەگەر خىرايى زىادىكرىت كاتەكە كەمدەكات و ئەگەر كاتەكە زىادىكرىت خىرايىكە كەمدەكات. بەم جۆرە پەيوەندىيانە دەوترىت نەخشەنى گۆرۈن. لەم وانەيەدا دوو جۆر نەخشەنى گۆرۈن وەردەگرىت: نەخشەنى گۆرۈن راستەوانە و نەخشەنى گۆرۈن پىچەوانە.

### گۆرۈن راستەوانە

دوو گۆرۈن  $x$  و  $y$  بەپەيوەندىيەكى راستەوانە بەيەكەو دەبەستىرنەو، ئەگەر رېژەنى يەككىيان بۆئەوى تریان نەگۆرۈن بىت، واتا ئەگەر  $\frac{y}{x} = k$  يان  $y = kx$  كاتىك  $k \neq 0$  ژمارەيەكى راستى دىيارىكراو بىت. ئەو دورىيەكى كە ئۆتۆمبىلەك دەيىرپىت بە خىرايى نەگۆرۈن  $110 \text{ km/h}$  دەپوات راستەوانە دەگۆرۈن بەگۆرۈن كات، ئەگەر كات زىادىكرىت دورىيەكە زىاد دەكات و ئەگەر كاتەكە كەمبىكرىت دورىيەكە كەمدەكات.

### نەخشەنى گۆرۈن راستەوانە

بە نەخشەنى  $f(x)$  دەوترىت نەخشەنى گۆرۈن راستەوانە، ئەگەر رېسايەكەكى بەشۆەنى  
 $f(x) = kx$  بىت،  
كاتىك  $k$  ژمارەيەكى راستى جگە لە سفر بىت، بە  $k$  دەوترىت نەگۆرۈن گۆرۈن.

لېخورىنى ئۆتۆمبىل يەككە لە شوڧىرەكان خولى تايبەت بۇ لېخورىنى ئۆتۆمبىل دەكاتەو. ئەگەر شوڧىرەكە لە ھەفتەنى يەكەم 8 كاتژمېر مەشقىكرىنى ھەبوو بەرامبەر 240 000 دىنار و لە ھەفتەنى دوووم 11 كاتژمېر مەشقىكرى، ئايا چەند وەردەگرىت ئەگەر بزانىت ئەو برە پارەيە راستەوانە دەگۆرۈن بە گۆرۈن ژمارەنى كاژمېرەكان.

وانەنى  
2

### نامانجەكان

- گۆرۈن راستەوانە دەناسىت و نەگۆرۈنەكى دىيارىدەكات.
- گۆرۈن پىچەوانە دەناسىت و نەگۆرۈنەكى دىيارىدەكات.
- ھاوگىشەنى گۆرۈن پىچەوانە دەنوسىت.
- ئەو پرسىيارانە شىكارىدەكات كە گۆرۈن راستەوانە يان پىچەوانە لەخۇدەگرىن.

### ژارومكان Vocabulary

- نەخشەكانى گۆرۈن
- Variation functions
- گۆرۈن راستەوانە
- Direct Variation
- نەگۆرۈن گۆرۈن
- Constant of variation
- گۆرۈن پىچەوانە
- Indirect variation
- دەرەكانارى ستوونى
- Vertical asymptote
- دەرەكانارى ئاسۆنى
- Horizontal asymptote

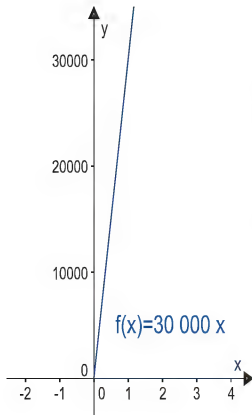
### نمونە

## شېكار

ئەۋەى شوفېرەكە ۋەردەگرىت ( $S$ ) بە راستەۋانە دەگۈرپت بە گۈرپنى ژمارەى كاتژمىرەكان ( $x$ ) بۇيە  
 نەگۈرپى گۈرپاۋ  $k$  رېژەى ( $S$ ) بۇ ( $x$ ) دەنۈيىت ۋاتە  $k = \frac{S}{x} = \frac{240000}{8} = 30000$  ۋاتە پاشاندا  
 $S(x) = 30000x$  لە ھەفتەى دوۋەم شوفېرەكە برى  $S(11) = 30000 \times 11 = 330000$  ۋاتە  
 دىنار ۋەردەگرىت.

## بىرى پەخنەگر

نەگۈرپى گۈرپاۋ لە نمونەى 1دا، چى دەگەيەنيت؟  
 سىروان برپارىدا گەشتىك بە دەۋرى جىھان بە رۈيشتنى نەگۈرپ بەپى بكات لە ھەفتەى  
 يەكەم سىروان 6 پۇژ رۈيشت و 384 كم برى لە ھەفتەى دوۋەم چەند كم برى؟ ئەگەر  
 زانیت دوو پۇژ پشوویدا.



نەخشەكانى گۈرپانى راستەۋانە بارىكى تايىبەتيە لە نەخشەى ھىلى  
 ۋەك دەزانیت كەشۋەى گشتى نەخشەى ھىلى برىتيە  $f(x) = ax + b$   
 كاتىك  $a$  لاريە و  $b$  يەكتربرىنى ستونىيە. نەخشەى گۈرپانى  
 راستەۋانە برىتيە لە نەخشەى ھىلى، يەكتربرىنە ستونىيەكەى  
 دەكاتە 5. لەمەش دەردەچىت كە رۈونكرنەۋەى نەخشەى راستەۋانە  
 برىتيە لە راستەھىلىك بەخالى بنەپەتدا دەروات.  
 رۈونكرنەۋەى نەخشەى نمونەى 1 بكيۋە.

## شېكار

تەماشى ۋىنەى بەرامبەر بكة، و تىبىنى ئەۋە بكة كە  
 نەخشەكە پىناسە نەكراۋە كاتىك  $x$  بەھى سالب ۋەردەگرىت، چۈنكە ئەۋ  
 گۈرپاۋە ژمارەى ئەۋ كاتژمىرانە دەنۈيىت كە شوفېرەكە مەشقى تىدا ھەبوۋە.

## نمونه

رۈونكرنەۋەى نەخشەى ھەۋلبدە بكيۋە كە لەۋاى نمونەى 1 ھاتوۋە.

## نەخشەكانى گۈرپانى پىچەۋانە

بە نەخشەى  $f(x)$  دەوترىت نەخشەى گۈرپانى پىچەۋانە، ئەگەر رىسايەكەى بەشۋەى  
 $f(x) = \frac{k}{x}$  يان  $xy = k$  بىت  
 كاتىك  $k$  ژمارەى راستى بىت جگەلە 0. بە  $k$  دەوترىت نەگۈرپى گۈرپانەكە.

## دار پواندن

## نمونه

تىپىكى دىدەۋان پەيماندا 500 نەمام بچىنيت لە ناۋچەيەكى رۈوت. ژمارەى ئەۋ نەمامانەى ھەر  
 تىپىكى دوو كەسى بە 10 نەمام خەملىندراۋە ھەر كاتژمىرىدا.

ا ھەرتىپىك چەند كاتژمىرى پىۋىستە بۆئەۋەى كارەكەى جىبەجىبكات.

ب 50 تىپ چەند كاتژمىرى پىۋىستە بۆئەۋەى پىكەۋە كارەكەيان ئەنجام بدەن.

ج 100 تىپ چەند كاتژمىريان پىۋىستە.

د نەخشەيەكى گۈرپانى پىچەۋانە بنووسە ژمارەى كاتژمىرەكان  $T$  كە بۇ  $x$  تىپ پىۋىستە  
 بنووسە، بۆئەۋەى پىكەۋە كارەكەيان ئەنجام بدەن.

ه ئەۋ نەخشە بەكاربەينە بۇ ھەژماركردى  $T(50)$  و  $T(100)$  ۋ ئەۋانەى دەستكەۋوتوون  
 بەراوردىان بكة لەگەل ھەردوۋە ۋەلامى ب، ج.



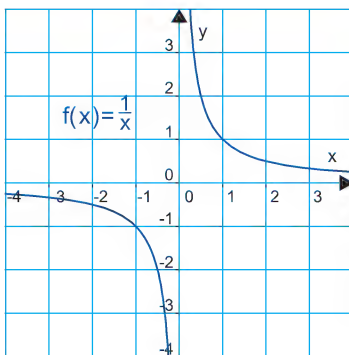
- أ  $50 = 500 \div 10$ ؛ تيپىك پىويستى به 50 كاتزمير به ئىنجامدانى كارەكە.
- ب  $10 = 500 \div 50$ ؛ تيپ پىويستى به 10 كاتزمير به ئىنجامدانى كارەكە.
- ج  $5 = 500 \div 100$ ؛ تيپ پىويستى به 5 كاتزمير به ئىنجامدانى كارەكە.
- د تيپىنى بىكە كە  $50 \times 10 = 500$  و  $50 \times 50 = 500$  و  $10 \times 50 = 500$  و  $5 \times 100 = 500$  لەي تيپىنىه دەرەجىت  $500 = T \times x$  يان  $T = \frac{500}{x}$ . نەخشەى گۆرانی پىچەوانە برىتيەلە  $T(x) = \frac{500}{x}$ .
- ه  $T(50) = \frac{500}{50} = 10$  و  $T(100) = \frac{500}{100} = 5$ ، ھەردوو ئىنجامەكە پىكىن لەگەل دوو وەلامى پرسىارى ب و ج.

## ھەولبدە

- أ خىرايى ئەم ئۆتۆمبىلە چەندبوو؟
- ب خىرايى ئۆتۆمبىلەكە چەند بوو ئەگەر بەخىرايىەكى پىك ماوہەكى به 8 كاتزمير برىيىت؟
- ج نەخشەىەكى گۆرانی پىچەوانە بنووسە خىرايى S ئۆنۆبىلەكە دەرەخات بەدانانى نەگۆرە بەپىيى كاتى  $x$  (بەكاتزمير) خايەنراو بەگەشتەكەى لە ھەولير بۆ بەغداد.
- د خىرايى ئۆتۆمبىلەكە چەندبوو كەماوہەكى به 4 كاتزمير برىوہ ئەگەر زانيت خىرايىەكەى نەگۆرپىت.

## ھەلگەراوہى نەخشە

ھەلگەراوہى نەخشە، نەخشەىەكە بە ھاوکیشەى  $f(x) = \frac{1}{x}$  پىنناسەكراوہ.



وینەى بەرامبەر پوونکردنەوہى ھەلگەراوہى نەخشە دەنۆيىت. ئەگەر بە ووردى سەيرى پوونکردنەوہەكە بکەيت تيپىنى ئەم خالانە دەكەى:

- دەتوانى بەھايەکان  $y$  بەرامبەر بە بەھايەکانى  $x$  ھەژماربەكەيت كاتىك  $x$  ھەرچەندبىت جگە لە سفر. بواری ھەلگەراوہى نەخشەكە برىتيەلە كۆمەلەى ژمارە راستىيەكان جگە لە سفر.
- ھەر چەند بەھايەکانى  $x$  زيادبكات. بەھايەکانى  $y$  كەمدەكات ئەمەش ئەو دەگەينى كە نەخشەكە پوو لە كەمبوونە.
- لەكاتىك گۆراوى  $x$  موجدب بىت و بەھايەکانى زياد دەكات بەھايەکانى  $y$  لە سفر نزيكەدبىتەوہ و بە موجدب دەمىنيتەوہ. بەشيوہىەكى تر دەليين:  $y$  بۆ لای سفرى موجدب نزيكەدبىتەوہ كاتىك  $x$  بەرەو  $+\infty$  نزيكەدبىتەوہ.
- لەكاتى گۆراوى  $x$  سالب بىت و بەھايەکانى كەم دەبىتەوہ بەھايەکانى  $y$  لە سفر نزيكەدبىتەوہ و بە سالب دەمىنيتەوہ. ئەمە بەم شيوہ دەرەدبىرپىت:  $y$  بۆ لای سفرى سالب نزيكەدبىتەوہ كاتىك  $x$  بەرەو  $-\infty$  نزيكەدبىتەوہ.
- بەھايەکانى  $y$  لە سفر نزيكەدبىتەوہ كاتىك بەھايەکانى پووتى  $x$  پوو لە زيادبوون دەبىت زياتر و زياتر ئەمە بەم شيوہ دەرەدبىرپىت: ئەو راستەھيلى بە ھاوکیشەى  $y = 0$  دەنۆيىت، واتە تەوہرى  $x$  دەبىتە دەرەنارى ئاسۆيى بۆ پوونکردنەوہى ھەلگەراوہى نەخشەكە.

6. هەرچەند بەهایەکانی سالب بۆ گۆراوی  $x$  زیادبکات، بەهایەکانی  $y$  کەمدەکات و بە سالب دەمینێتەوه واتە:  $y$  بۆ لای  $-\infty$  نزیكدەبێتەوه کاتی  $x$  لە سفر نزیكدەبێتەوه لە چەپەوه.
7. هەرچەند بەهایەکانی مۆجەب بۆ گۆراوی  $x$  کەمدەکات، بەهایەکانی  $y$  زیاد دەکات و بە مۆجەب دەمینێتەوه واتە:  $y$  لە لای  $+\infty$  نزیكدەبێتەوه کاتی  $x$  بەرەو سفر دەرواوە لە راستەوه.
8. بەهایە رووتەکانی  $y$  پوو لەزیادبوون دەبێت زیاتر و زیاتر هەرچەند گۆراوی  $x$  بەهایە رووتەکانی کەمدەکات زیاتر و زیاتر و بەم شیوەیه دەردەبێن:
- ئەو راستەهێڵی بە هاوکێشە  $x=0$  دەنوێنێت، واتە تەوهری  $y$  دەکاتە دەرکەناری ئەستوونی بۆ روونکردنەوهی هەلگەراوهی نەخشەکە.

## نموونه

پوونکردنەوهی نەخشە  $f(x) = \frac{-2}{x}$  بکێشە.

### شیکار

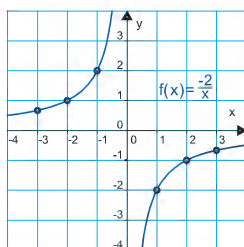
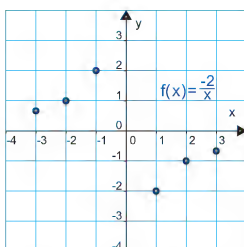
ههنگاوی 1 خشتهی بههایهکان دروستبکە.

$x$	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	1	2	-2	-1	$-\frac{2}{3}$

ههنگاوی 2 ئەو خالانە دیاریبکە کە خشتهکە دەنوێن.

ههنگاوی 3 چهماوهیهکی گونجاو بکێشە، ئاگاداریه کە

تەوهری  $x$  دەرکەناری ئاسۆیی و تەوهری  $y$  دەرکەناری ستوونی پوونکردنەوهکەیه.



ههولبده پوونکردنەوهی نەخشە  $f(x) = \frac{3}{x}$  بکێشە.

## راھێنان

### بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەگەر خشتهیهکت ههبيت بههایهکانی گۆراوی  $x$  و بههایه بهرامبەرەکانی  $y$  تێدابیّت، چۆن دەزانیت ئەو خشتهیه پەيوەندییهکی گۆراوی راستەوانەى نۆوان دوو گۆراوهکە دەنوێنێت، چۆن نەگۆری گۆراپەنەکە لەم بارەدا دەدۆزیتەوه.

2 ئەگەر خشتهیهکت ههبيت بههایهکانی گۆراوی  $x$  و بههایه بهرامبەرەکانی  $y$  تێدابیّت، چۆن دەزانیت ئەو خشتهیه پەيوەندییهکی گۆراوی پێچهوانەى نۆوان دوو گۆراوهکە دەنوێنێت، چۆن نەگۆری گۆراپەنەکە لەم بارەدا دەنوێنێت.

3 دوو گۆراوی  $x$  و  $y$  بە پەيوەندییهکی گۆراوی پێچهوانە بهیهکەوه دەبەستێرنەوه. کە  $y = 3$  کاتی  $x = 8$ . چۆن بههای  $y$  دەدۆزیتەوه کاتی  $x = 2$  باسیبکە.

## ● رايھىنانى ئاراستە كراۋ

4 ئۇەۋى ئازاد وەرىدەگىرىت بەرامبەر كارەكەى لەكارگەيەك راستەۋانە دەگۈرپىت لەگەل ژمارەى كاتژمىرەكانى كارەكەى، ئازاد 300 000 دىنارى ھەفتەى يەكەم وەرگرت بەرامبەر 20 كاتژمىر كاركردن.

ا ھاوكېشەيەكى نەخشەى راستەۋانە بنوسە، پرسىارەكە دەربىرپىت.

ب ئازاد 24 كاتژمىر ئەم ھەفتەيە كاريكر، چەند وەردەگىرىت؟

ج ئازاد بىرپاريدا ھەفتەى داھاتوو 450 000 دىنار وەربىگىرىت، پىۋىستە چەند كاتژمىر كارىكات؟

5 ئۆتۆمبىللىك بەخىرايى نەگۈر لە پىگاي خىرا لە سلىمانى بۆ بەسرە ( 920 كم) دەپوات. قالا ماۋەكە بەخىرايى 100 km/h بىرى.

ا ھاوكېشەى نەخشەى گۈرپاۋى پىچەۋانە بۆ ھەژماركردى ماۋەى  $T$  كە گەشتەكە دەخاينىت بەپىيى  $s$  بنوسەۋە.

ب ئازاد ھەمان ماۋەى بەخىرايى 125 km/h بىرى، گەشتەكەى ازاد چەندى خايەند.

ج شىرزاڭ سلىمانى لە كاتژمىرى 8 ى بەيانى بەجىھىشت و دەيەۋى كاتژمىرى 7 ئىۋارە بگاتە بەسرە لەگەل ۋەستانى كاتژمىرىك بۆ نانخواردن، دەبى بە چ خىرايىەك ئۆتۆمبىلەكە لىبخورىت؟

دىاربىكە ئەگەر خشتەكە پەيوەندى گۈرپاۋى راستەۋانە يان پەيوەندى گۈرپاۋى پىچەۋانە دەنۋىنىت يان ھىچيان نانوئىت.

$x$	24	4	12
$y$	30	5	15

8

$x$	2	5	9
$y$	3	6	4

7

$x$	6	4	1
$y$	2	3	12

6

## ● رايھىنان و جىيە جىكردن

9 تىپى شانۋى مىللى خۋى ئامادە دەكات بۆ سازدانى شانۋگەريەكى نوئ بە بۇنەى جەژنى نەورۇز بۆ ئەمەش پىۋىستى بە ئامادەكردى دىكۈرە كە 3 پۇژ دەخايەنىت ئەگەر 20 كرىكار كارى لىبكات.

ا ھاوكېشەى نەخشەى گۈرپاۋى پىچەۋانە بۆ ھەژماركردى ماۋەى  $T$  كە پىۋىستە بۆ ئامادەكردى دىكۈرەكە بنوسە بەپىي ژمارەى كرىكاران  $x$  كە كارى لىدەكەن.

ب 12 كرىكار كاردەكەن، چەند ماۋە پىۋىستە بۆ ئامادەكردى دىكۈرەكە.

ج بەريۋەبەرى شانۋ داۋاىكر كە دىكۈرەكە ئامادەبكرىت بە دوو پۇژ. دەبى چەند كرىكار كارىكەن.

دىاربىكە ئەگەر خشتەكە پەيوەندى گۈرپاۋى راستەۋانە يان پەيوەندى گۈرپاۋى پىچەۋانە دەنۋىنىت يان ھىچيان نانوئىت.

$x$	5	7	9
$y$	3	5	7

12

$x$	5	6.25	10
$y$	5	4	2.5

11

$x$	8	14	24
$y$	12	21	36

10

13 دەرچووانى زانكۆى دھۆك گەشتىك بۇ عىمان پىكدەخەن خويندكارانى زانكۆ بەشدارى تىدا دەكەن. نرخى بەشدارى كردن لەگەشتەكە بە گۆپانى ژمارەى بەشداربووان پىچەوانە دەگۆپىت، نرخى بەشداربووان بۇ خويندكارىك 250 000 دىنار دەبىت ئەگەر ژمارەى بەشداربووان 24 خويندكار بىت. ژمارەى بەشداربووان پىويستە چەند بىت بۇ ئەوەى نرخى بەشداربووانى يەك خويندكار بىتە 200 000 دىنار.

## روانىن بۆدواوه



پلەى ھەر رادەدارىك چەندە؟

$$f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 + 1 \quad 14$$

$$g(x) = 2 - 5x + 7x^2 - x^3 \quad 15$$

$$h(x) = -5x^3 - x^4 + 1 \quad 16$$

## روانىن بۆپىشەوہ



17 ژمارەى دانەكانى كۆمەلىك بەكتريا لەھەر كاتژمىرىك دەبىتە دوئەوئەندە، ژمارەى دانەكانى كۆمەلەكە دواى 5 كاتژمىر دەبىتە چەند ئەگەر بەدوو دانە دەستىپىكرد؟



# نەخشە توانییەکان

## Exponential Functions



بۆچی؟

ئەو كەسانەى شتە دەگمەنەكان  
كۆدەكاتەو دەتوانن نەخشە توانییەكان  
بەكاربەئین بۆ نرۆستكردى نموونەىەك  
بەهاى شتە كۆكراوكان بنوێنێت. وەك  
نامێرە دەگمەنەكانى مۆسیقا.

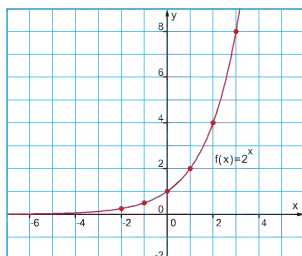
ياسای مۆر Moore لەپیشەسازى بژمێردا بەكاردىت، لە دەقى ئەو ياسايدا ھاتوو، ژمارەى ئەو ترانزستەرەنەى لە پێكھاتەكانى بژمێردا ھەيە، سالانە دوو ھىند دەبێتەو، لەخشەى خوارو ھە ژمارەى ترانزستەرەكان و زیادبوونى لەپێكھاتەكانى بژمێردا لە سەرەتاکانى دروستبوونى ئەم پيشەسازىيە دەردەكەوێت.

ژمارەى ترانزستۆرەكان لەپێكھاتە							
سال	1971	1970	1969	1968	1967	1966	1965
ژمارە	3840	1920	960	480	240	120	60

$$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$$

دەتوانرێت ئەو زیادبوونەى كە سالانە دووھىند دەبێتەو بنوێنرێت بە بەكارھێنانى نەخشەىەك تەوانەكەى گۆراوێك لەخۆبگرێت. ئەم نەخشانە بە نەخشەى توانى دەناسرێن سادەترین نەخشەى توانى بریتىيەلە نەخشەى  $f(x) = b^x$  كاتێك **بنچینە**  $b$  ژمارەىەكى نەگۆر، و تەوانەكە گۆراوێكى ئازاد بێت.

توان  $f(x) = b^x$  و  $b > 0, b \neq 1$  بنچینە



لەوینەى بەرامبەر پوونكردنەو ھى نەخشەى  $f(x) = 2^x$  دەردەكەوێت بوارى ئەم نەخشەىە بریتىيەلە كۆمەلەى ھەموو ژمارە راستىيەكان مەودايەكەى بریتىيەلە ژمارە راستىيە مەجەبەكان.  $\{y/y > 0\}$

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

سەرنج بدە پوونكردنەو ھى نەخشەكە زياتر و زياتر لەتەو ھى  $x$  نزیكەدەبێتەو ھەر چەند بەھاكانى  $x$  كەمبكات. ھەر ھە پوونكردنەو ھەكە لە تەو ھى  $x$  ناكەوێت، بەلكو لەسەرەو ھى تەو ھەكە دەمىنێتەو، لەبەرئەو ھى برى  $2^x$  بە مەجەبى دەمىنێتەو بەھاى  $x$  ھەر چەند بێت. تەو ھى  $x$  بریتىيەلە دەرەكانارى ئاسووى پوونكردنەو ھى نەخشەى  $f(x) = 2^x$ . دەرەكانار راستەھىلێكە پوونكردنەو ھى نەخشەكە زياتر و زياتر لى نزیكەدەبێتەو ھەر چەند بەھاى  $x$  زۆر گەورەتر دەبێت يان زۆر بچوكتەر دەبێت.

ھەرنەخشەىەك  $f(x) = ab^x$ ، كاتێك  $a > 0$  و  $b > 1$  بریتىيەلە نەخشەى گەشەى توانى بەھاىەكەى زياد دەكات بە زیادبوونى بەھاى  $x$ . بەلام ئەگەر  $0 < b < 1$  ئەوا نەخشەى  $f(x) = ab^x$  بریتىيەلە نەخشەى لىژبوونەو ھى توانى بەھاىەكەى كەمدەكات بە زیادبوونى بەھاى  $x$ .

### نامانجەكان

- برە توانییەكان بۆ نواندى بارەكانى گەشە و لىژبوونەو دەنوسێت و ھەژماريان دەكات.
- نەخشەكانى گەشەى توانى و لىژبوونەو ھى توانى دەناسێت.
- نەخشەكانى توانى سروشتى دەناسێت.

### زاراوەكان

#### Vocabulary

- نەخشەى توانى  
Exponential function
- بنچینە  
Base
- دەرەكانار  
Asymptote
- گەشەى توانى  
Exponential growth
- گەرانەو ھى توانى  
Exponential decay
- نەخشەى توانى سروشتى  
Natural exponential function

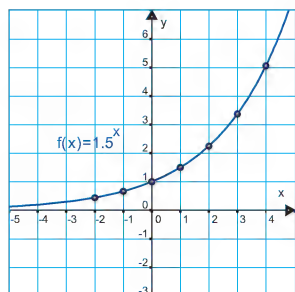
### لەبیرت بێت

لە پەيوەندى  $y = b^x$ ،  $y$  گۆراوى پەيوەستى گۆراوى  $x$ ، چونكە بەھاى  $y$  بە بەھاى  $x$  دیاریدەكرێت.

کیشانی پروونکردنه‌وی نه‌خشه توانییه‌کان

دیاریبکه که نه‌خشه‌که نه‌خشیه‌کی گه‌شهی توانییه یان گه‌پانه‌وه توانییه،  
پاشان پروونکردنه‌وه‌کهی بکیشه

$$f(x) = 1.5^x$$



هه‌نگاوی 1 به‌های بنچینه دیاریبکه.

$$f(x) = 1.5^x \text{ بنچینه } 1.5 \text{ له } 1 \text{ گه‌وره‌تره، نه‌خشه‌که}$$

نه‌خشیه‌کی گه‌شهی توانییه.

هه‌نگاوی 2 پروونکردنه‌وی نه‌خشه‌که به به‌کاره‌ینانی

خشته‌ی به‌هایه‌کان بکیشه.

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.7	1	1.5	2.3	3.4	5.1

$$f(x) = 30(0.8)^x$$

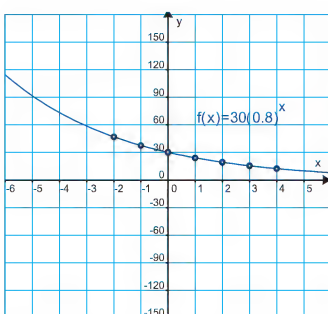
هه‌نگاوی 1 به‌های بنچینه دیاریبکه.

$$f(x) = 30(0.8)^x \text{ بنچینه } 0.8 \text{ له } 1 \text{ بچو‌کتره، نه‌خشه‌که}$$

نه‌خشیه‌کی گه‌پانه‌وه‌ی توانییه.

هه‌نگاوی 2 پروونکردنه‌وی نه‌خشه‌که به به‌کاره‌ینانی

خشته‌ی به‌هایه‌کان بکیشه.



$x$	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	30	19.2	12.29	7.86	5.03	2.22	2.06

هه‌ولبده

1. دیاریبکه ئایا نه‌خشه‌ی  $f(x) = 5(1.2)^x$  نه‌خشیه‌کی گه‌شهی توانییه یان لیژبونه‌وه‌ی توانییه،  
پروونکردنه‌وه‌کهی بکیشه.

ده‌توانیت گه‌شه یان لیژبونه‌وه به به‌کاره‌ینانی پڙه‌ی سهدی ئه‌و گه‌شیه یان ئه‌و گه‌پانه‌وه‌یه  
بنوینیت. ئه‌گه‌ر  $r\%$  پڙه‌ی سهدی گه‌شه یان گه‌پانه‌وه‌ی هیندیک‌ی دیارکراو له‌کاتیک‌ی دیارکراو  
(سال یان مانگ یان هه‌فته یان کاترمیر...) بیت وه‌ک دانانی (ایداع) بره‌ پارهی‌که له‌بانک‌یک، ئه‌وا  
به‌و پڙسای خواره‌وه ده‌توانریت ئه‌و بره‌ پارهی‌ه پاش  $t$  ماوه‌ی کات بدوژیه‌وه.

$$A(t) = a(1 \pm r)^t$$

گوژمه‌ی بنه‌په‌تی      ژماره‌ی ماوه‌ کاتییه‌کان  
گوژمه‌ی کو‌تایی      تیکرای گو‌ران

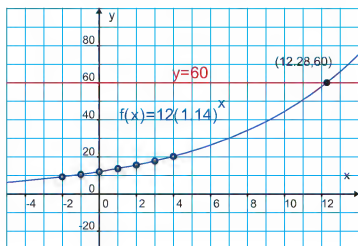
بنچینه‌ی ئه‌و نه‌خشه توانییه‌ی سهره‌وه بریتیه  $1+r$  له‌باری زیادبوونه و پڙی ده‌وتریت  
هاوکۆلکه‌ی گه‌شه و  $1-r$  له‌باری که‌مبوونه و پڙی ده‌وتریت هاوکۆلکه‌ی گه‌پانه‌وه.

له سالی 2000 گوځه ند گیتاریکی دهگمهنی کړی به 12 ملیون دینار، که میژووه که ی بۆ سالی 1959 دهگه پیتته وه. شاره زایه کان وایان خه ملاند که نرخی گیتاره که به تیکرایی 14% سالانه زیاده دکات. به پروونکردنه وه یی ئه و ساله بدوزوه که نرخی که ی تیددا ده بیته 60 ملیون دینار.

هنگاوی 1 نه خشه یه که بنوسه که نمونه یه که بۆ گوځانی نرخی گیتاره که پیکده ییت.

$$f(t) = a(1+r)^t \quad \text{نخشی گشهی توانی}$$

$$\begin{aligned} \text{له جیاتی } a \text{ به هایه کی } 12 \text{ و له جیاتی } r \text{ به هایه کی } 0.14 \\ \text{دابی.} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= 12(1+0.14)^t \\ &= 12(1.14)^t \end{aligned}$$



هنگاوی 2 ئه و خالانه دیار که که خسته که دنویت،

پاشان چه ماوه یه کی گونجاو بکیشه به و خالانه دا پروات.

x	-8	-4	0	2	4	8
f(x)	4.21	7.1	12	15.6	20.27	34.23

هنگاوی 3 راسته هیلی  $y=60$  بکیشه و پوتانی  $x$  بۆ خالی یه کتر برینی له گه ل پروونکردنه وه ی نه خشه که به ملینه. له پروونکردنه وه که در ده که ویت که پوتانی  $x$  بۆ خالی یه کتر برین ده که ویت نیوان 12-13. واتا نرخی گیتاره که ده بیته 60 ملیون دینار له سالی سیژدم دوی کړینی، واتا له سالی 2013.

هه ولبد

ژماره ی نه هه نگه کووپه کانی ئوسترالیا 350 نه هه نگ بوو له سالی 1981 و ژماره کی سالانه به تیکرایی 12% زیاده دکات. نه خشه یه کی توانی بنوسه که نمونه یه کی ئه و زیاده بوونه پیکده ییت، پاشان پروونکردنه وه ی ئه و نه خشه بکیشه و به کاری به یته بۆ دیار کړدن ئه و ساله ی که ژماره ی نه هه نگه کان ده بیته 1500 نه هه نگ.

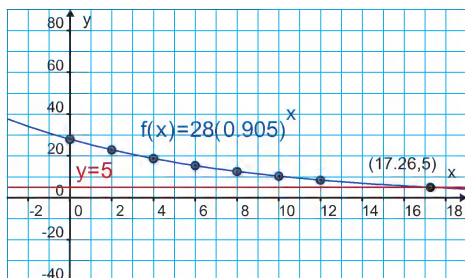
جیبېجیکردن له سه ر دابه زینی نرخ

نرخی باره لگړیکی نوی 28 ملیون دیناره، سالانه به تیکرایی 9.5% که ده دکات. نه خشه یه کی توانی بنوسه نمونه یه کی ئه م که مبوونه پیکه ییت. پاشان پروونکردنه وه ی نه خشه که بکیشه و به کاری به یته بۆ دیار کړدن ئه و ساله ی نرخی باره لگړه که ده بیته 5 ملیون دینار.

هنگاوی 1 نه خشه یه که بنوسه که نمونه یه که بۆ گوځانی نرخی باره لگړه که پیکده ییت.

$$f(t) = a(1-r)^t \quad \text{نخشی لیژبوونه وه ی توانی}$$

$$\begin{aligned} \text{28 له جیاتی } a \text{ و } 0.095 \text{ له جیاتی } r \text{ دابی.} \\ &= 28(1-0.095)^t \\ &= 28(0.905)^t \end{aligned}$$



هنگاوی 2 پروونکردنه وه ی نه خشه که بکیشه.

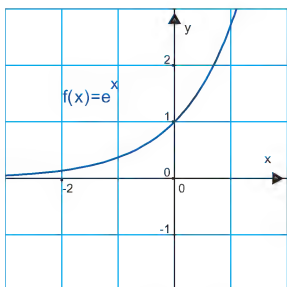
x	0	2	4	6	8	10	12
f(x)	28	22.93	18.78	15.38	12.6	10.32	8.45

ئو خالانه دیار که که خسته که دنویتن و چه ماوه یه کی گونجاو بکیشه به و خالانه دا پروات.

ههنگامی 3 راسته‌هایی  $y=5$  بکشی و پووتانی خالی یه‌کتربرینی له‌گه‌ل پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌که بخه‌ملینه. له‌وینه پوونکردنه‌وهیه‌که ده‌که‌وینه که پووتانی  $x$  بو خالی یه‌کتربرینی راسته‌هایی له‌گه‌ل پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌که ده‌که‌وینه نیوان 17 و 18، واتا نرخه باره‌لگره‌که ده‌بیته 5 ملیون دینار له سالی هه‌ژدهمین دوی کرینی.

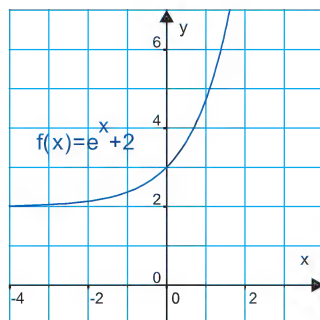
## هه‌ولبد

ماتۆرسکیلیک نرخه‌که‌ی یه‌ک ملیون دینار و نرخه‌که‌ی سالانه به‌تیکرای 15% که‌مده‌کات، نه‌خشه‌یه‌کی توانی بنووسه که نمونه‌یه‌کی نه‌و که‌مبونه پیکده‌هینیت، پاشان پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌که بکشی بو دیاریکردنی نه‌و سالی نرخه‌که‌ی ده‌بیته 100 هه‌زار دینار.



جوړیکی دیاریکراو له نه‌خشه توانیه‌کان هه‌یه که پوړیکی گرنگ له جیه‌جیکردنه ئابووری و کو‌مه‌لایه‌تیه‌کان و داراییه‌کان ده‌بینیت. ئه‌ویش نه‌و نه‌خشه توانیه‌کانه‌یه که بنچینه‌که‌یان ژماره‌ی نیپه‌ره *Neper* که به  $e$  هیمما ده‌کریت ژماره‌یه‌کی نارپژه‌یه‌یه و  $\pi$  و به‌هایه‌که‌ی  $e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 4\dots$

نه‌و نه‌خشه توانیه‌کانه‌ی بنچینه‌که‌ی  $e$  بیت، پپی ده‌وتریت نه‌خشه توانیه‌ سروشتیه‌کان. نه‌خشه‌ی توانی سروشتی هه‌موو سیفه‌ته‌کانی نه‌خشه‌ی توانی هه‌یه.



کی‌شانی پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌ی توانی سروشتی پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌ی  $f(x) = e^x + 2$  بکشی.

## شیکار

خسته‌ی به‌هایه‌کانی نه‌م نه‌خشه دروستیکه، له‌به‌رئه‌وه‌ی ژماره  $e$  ژماره‌یه‌کی نارپژه‌یه‌یه. ده‌توانیت به‌های نه‌خشه‌که بو ده‌یه‌ک نزیکه‌یه‌وه.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = e^x + 2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1

هه‌ولبد 4. پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌ی  $f(x) = e^x - 3$  بکشی.

## راهیان

### به‌رده‌وامبون له‌بیر کاریدا

1 نه‌خشه‌یه‌کی توانی بنچینه‌که‌ی ده‌که‌وینه نیوان 0 و 1، ئایا نه‌خشه‌که نه‌خشه‌یه‌کی گه‌شه‌ی توانیه‌ یان لیژبوونه‌وه‌ی توانیه‌یه؟

2 نه‌خشه‌ی توانی  $f(x) = 25 \times 2^x$  گه‌شه‌ی کو‌مه‌لیک به‌کتریا ده‌نوینیت، ژماره 25 چی ده‌نوینیت؟ ژماره 2 چی ده‌نوینیت؟

3 نه‌خشه‌ی توانی  $f(x) = 25 \times 2^x$  گه‌شه‌ی کو‌مه‌لیک به‌کتریا ده‌نوینیت. ریژه‌ی سه‌دی گه‌شه‌ی نه‌و کو‌مه‌له‌ چنده؟



## راھینانی ئاراستە کراو

دیاریکە نایا نەخشەکە نەخشەییەکی گەشەیی تەوانییە یان گەڕانەوێ تەوانییە. یان هیچکامیان نییە

$$f(x) = 0.4 \left( \frac{3}{4} \right)^x \quad \boxed{6}$$

$$f(x) = 0.5(1.2^x) \quad \boxed{5}$$

$$f(x) = 32(0.5^x) \quad \boxed{4}$$

$$f(x) = 10(2.7)^x \quad \boxed{9}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(1.3)^x \quad \boxed{8}$$

$$f(x) = \left( \frac{1}{3} \right)^x \quad \boxed{7}$$

$$f(x) = 1(0.5)^x \quad \boxed{12}$$

$$f(x) = 0^x \quad \boxed{11}$$

$$f(x) = 2(10)^x \quad \boxed{10}$$

## راھینان و جێبەجێکردن

**13** **بژمێر** نرخێ بژمێرەکان سالانە بەتێکڕایی 30% کەمەدەکات، کاوێ بژمێرێکی پێشکەوتووی کڕی بە 2 765 000 دینار، ژمارەیی ئەو سالانەیی پێویستە بخرەملێنە بۆ ئەوێ نرخێ ئەو بژمێرە لە 350 000 دینار کەمتر بێت؟

**14** **بانکەکان** بانکەکان یاسایەکی بۆ هەژمارکردنی بەهای هەنووکەیی بۆ گۆژمەییەکی دانراو بەکار دەهێنن  $A = P \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$  کاتێک  $A$  گۆژمەیی هەنووکەیی و  $P$  گۆژمەیی بنەپەتی دانراو و  $r$  تێکڕای سوودی سالانەیی و  $t$  ماوەیی بە سال و  $n$  ژمارەیی ماوەکانە لە سالیکی کە پارەکە لە پاشەکەوت هەژمار دەکری و  $t$  و  $n$  هەژمارکردنی سوودەکە و دانانی سەر گۆژمەیی دانراو (المودع). سروود 5 ملیۆن دینار بە تێکڕایی سوودی سالانە 5% بە پاشەکەوتی وەرزی (4 جار لە سالیکی) دانا.

**أ** بەهای گۆژمەکە دەبێتە چەند پاش 5 سال.

**ب** کەیی گۆژمە دانراوەکە 10 ملیۆن دینار تێپەر دەبێت.

**ج** **ئەگەر هاتوو** سروود چەند قازانج دەکات پاش 5 سال ئەگەر هاتوو پاشەکەوت بە مانگانەبێت نەک وەرزانە؟

**15** **خەملاندن** ژمارەیی دانیشتوانی سەر زەوی سالی 2000 بە 6.1 ملیار کەس، هەروەها تێکڕایی زیادبوونیان سالانە بە 1.4% خەملێنرا. ژمارەیی دانیشتوانی سەر زەوی لە سالی 2020 بخرەملێنە. نەخشەییەکی بنووسە زیادبوونی دانیشتوانی سەر زەوی بەپێی سال لە پاش سالی 2000 (2000 = سالی 0) دەنویێت. و بەکاری بهێنە بۆ بەراوردکردنی خەملاندنەکەیی پێشوت لەگەڵ ئەوێ هەژمارت کرد بە بەکارهێنانی نەخشەکە.

## روانين بۆدواوه



16 ئەو سىستىمە ھىلىيە شىكارىكە.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-3z=-1 \end{cases}$$

## روانين بۆپىشەو



17 سىگۇشەى سىرىنسىكى شىۋەيەكە بە دەستت دەكەوئىت لە

سىگۇشەيەكى پىك (يەك لا) بە ۋەرگرتنى سىگۇشەيەكى

پىك لە ناۋەرپاستى سىگۇشەى يەكەم. ۋە ئەم كارە

دووبارەدەبىتەۋە لەھەر سىگۇشەيەك بە دەستت دەكەوئىت.

ژمارەى سىگۇشەكان لە قۇناغى پىنجەم دەبىتە چەند؟



# نەخشە لۇگارىتمىيەكان

## Logarithmic Functions



لۇگارىتمىيەكان بۇ پىئوانى  
ترشى ئاۋ بەكار دىت

بۇجى

ۋانەى

4

### ئامانچەكان

- شىۋەى ھاۋتاكانى نەخشەى
- توانى و لۇگارىتمى
- دەنوسىت.
- نەخشەى لۇگارىتمى
- دەنوسىت و
- پوونكردەنەۋەكەى دىكىشيت و
- بەھايەكەى ھەژماردەكات.

### زاراۋمكان

#### Vocabulary

Logarithm لۇگارىتم

لۇگارىتمى ئاسايى

Common logarithm

لۇگارىتمى سروسىتى

Natural logarithm

نەخشەى لۇگارىتمى

Logarithmic function

چەندجار دىنارىك دوو ئەۋەندە دىكەيت بۇئەۋەى بېتە 8 دىنار؟ دىتوانىت ھاۋكىشەى  $1 \times (2)^x = 8$  بەكاربەيتىت بۇ نواندىنى ئەۋ كارە. لەۋانەىە بىتوانىت ئەم ھاۋكىشە بەھزرى شىكارىكەيت ئەگەر بېتەبىرت  $2^3 = 8$ ، پىۋىستە دىنارىك 3 جار دوۋئەۋەندە بىكەيت بۇئەۋەى 8 دىنارت دەستىكەۋىت.

چەندجار دىنارىك دوۋئەۋەندە دىكەيت بۇئەۋەى بېتە 512 دىنار؟ دىتوانىت ئەۋ پرسىارە شىكارىكەيت ئەگەر بىتوانىت ھاۋكىشەى  $2^x = 512$  شىكارىكەيت. بە بەكاربەيتانى كىردارى پىچەۋانەى بەرزكردەۋەى ژمارەىەك بۇ ھىزىك بەتوانىكى دىارىكراۋ. ئەۋ كىردارە پىچەۋانە برىتىيە لە ھەژماركىردىنى لۇگارىتم. لۇگارىتم برىتىيە لە تۋانى ئەۋ ھىزەى كە ژمارەىەك (بىچىنەىەك) دىارىكراۋ بۇى بەرزدەكرىتەۋە بۇئەۋەى بەھايى دراۋت دەستىكەۋىت.

دەتوانىت ھاۋكىشەى تۋانى بەشىۋەى ھاۋكىشەى لۇگارىتمى بىنوسىت و بەپىچەۋانەۋە.

ھاۋكىشەى لۇگارىتمى

ھاۋكىشەى تۋانى

$$\log_b a = x \quad b^x = a$$

$b > 0, b \neq 1$

## نمونە

1 گۆرپىن لەشىۋەدى تۈانى بۇ شىۋەدى لۇگارىتىمى

ھەر ھاۋكىشەيەكى تۈانى بەشىۋەدى لۇگارىتىمى بنۈوسە.

شاۋەدى لۇگارىتىمى	ھاۋكىشە تۈانى	
$\log_2 64 = 6$	$2^6 = 64$	أ
$\log_4 4 = 1$	$4^1 = 4$	ب
$\log_5 1 = 0$	$5^0 = 1$	ج
$\log_5 0.04 = -2$	$5^{-2} = 0.04$	د
$\log_3 81 = x$	$3^x = 81$	ه

بنچىنە تۈانى دەپتە بنچىنە لۇگارىتىم.

تۈانى ھىز برىتىيە لۇگارىتىم.

ھىزى ھەر ژمارەك جگەلە سفر بەتۈانى سفر دەكاتە 1

لەۋانە تۈان يان لۇگارىتىم سالب بىت.

لەۋانە تۈان يان لۇگارىتىم بىت.

ھەۋلبدە ھاۋكىشە تۈانىيەكە بەشىۋەدى لۇگارىتىمى بنۈوسە.

أ  $9^2 = 81$  ب  $3^3 = 27$  ج  $x^0 = 1 (x \neq 0)$

2 گۆرپىن لەشىۋەدى لۇگارىتىمى بۇ شىۋەدى تۈانى

ھاۋكىشە لۇگارىتىمىيەكان بەشىۋەدى تۈانى بنۈوسە.

شاۋەدى تۈانى	ھاۋكىشە لۇگارىتىمى	
$10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$	أ
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$	ب
$8^{-1} = 0.125$	$\log_8 0.125 = -1$	ج
$5^1 = 5$	$\log_5 5 = 1$	د
$12^0 = 1$	$\log_{12} 1 = 0$	ه

بنچىنە لۇگارىتىم دەپتە بنچىنە تۈان.

لۇگارىتىم برىتىيە لۇگارىتىمى ھىز.

لەۋانە ئەنجامى لۇگارىتىم سالب بىت.

ھەۋلبدە ھاۋكىشە لۇگارىتىمىيەكان بەشىۋەدى تۈانى بنۈوسە.

أ  $\log_{10} 10 = 1$  ب  $\log_{12} 144 = 2$  ج  $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

لۇگارىتىم تۈانە، كەۋاتە دەتۈانىن ياسايەكانى ھىز لە لۇگارىتىمەكان جىبەجىبەكەين. لەۋانە

سەرنجى ئەۋ سىفەتانەت لەدۋا نمونە دابىت.

ھەندىك سىفەتى لۇگارىتىم		
$b$ ھەر بنچىنەيەك بىت و $b > 0$ و $b \neq 1$ .		
نمونە	شىۋەدى تۈانى	شىۋەدى لۇگارىتىمى
$\log_{10} 10 = 1$ $10^1 = 10$	$b^1 = b$	لۇگارىتىمى $b$ بەبنچىنە $b$ $\log_b b = 1$
$\log_{10} 1 = 0$ $10^0 = 1$	$b^0 = 1$	لۇگارىتىمى 1 $\log_b 1 = 0$

لۇگارىتىمى ناسايى لۇگارىتىمى بنچىنە 10. ئەگەر بنچىنە لۇگارىتىم دىيارىنەكرابىت ئەۋا

10 يە. نمونە:  $\log 5 = \log_{10} 5$



## نمونە

3

هەژمارکردنی بەهای لۆگاریتم بەهزری

بەهایەکان بە هزری هەژماریکە.

$$\log_4 \frac{1}{4}$$

ب

$$4^? = \frac{1}{4}$$

$$4^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$\log_4 \frac{1}{4} = -1$$

$$\log 1000$$

ا

$$10^? = 1000$$

$$10^3 = 1000$$

$$\log 1000 = 3$$

هەولبە

بەهزری بەهای برەکە هەژماریکە.

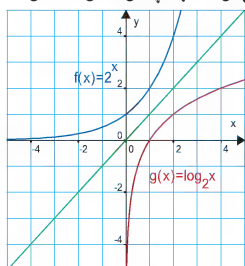
$$\log_{25} 0.04$$

ب

$$\log 0.00001$$

ا

لەبەرئەوەی دەتوانین نووسینی شیوەی توانی بگۆڕین بۆ شیوەی لۆگاریتمی و بە پێچەوانەوه، ئەوا



هەموو نەخشەیەکی توانی  $f(x)$  نەخشەیەکی نوێی  $g(x)$  ی لێ پەیدا

دەبێت کە بەشیوەی لۆگاریتمی دەنوسرێت و پێی دەوترێت نەخشەی

لۆگاریتمی پێچەوانە. ئەگەر  $f(x) = b^x$ ، ئەوا  $g(x) = \log_b x$  بواری

نەخشەی  $g(x)$  بریتییه لە مەودای نەخشەی  $f(x)$  و مەودای نەخشەی  $g(x)$

بریتییه لە بواری نەخشەی  $f(x)$ . لە وێنەی بەرامبەر پوونکردنەوهی

نەخشەی  $f(x) = 2^x$  و پوونکردنەوهی نەخشەی لۆگاریتمی پێچەوانە

نەخشەی  $g(x) = \log_2 x$  و پاستەهێڵی  $y = x$  دەردەکەوێت. سەرنبەدە کە دوو پوونکردنەوهی نەخشەی توانی

و نەخشەی لۆگاریتمی پێچەوانە هاوچێن بەپێی پاستەهێڵەکە.

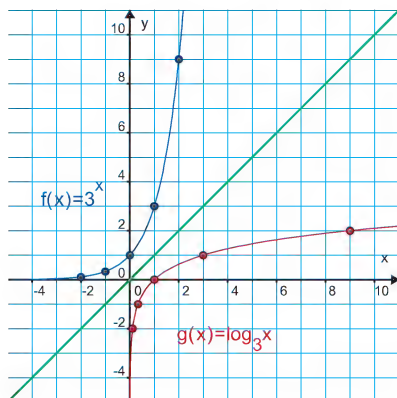
وێنەکێشانی پوونکردنەوهی نەخشەی لۆگاریتمی

4

## نمونە

بەها دراوەکانی گۆڕاوی  $x$  بۆ کێشانی پوونکردنەوهی نەخشەکە بەکارهێنە، پاشان پوونکردنەوهی

نەخشەی لۆگاریتمی پێچەوانە بکێشه بواری و مەودای نەخشە لۆگاریتمییەکە دیارییکە.



$$x = -2, -1, 0, 1, 2; f(x) = 3^x$$

ا

پوونکردنەوهی نەخشەی  $f(x) = 3^x$  بە بەکارهێنانی

خشتە بەهایەکان بکێشه.

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

بۆئەوهی پوونکردنەوهی نەخشەی لۆگاریتمی

$g(x) = \log_3 x$  بکێشیت  $x$  و  $f(x)$  لەخشتە سەرەوه

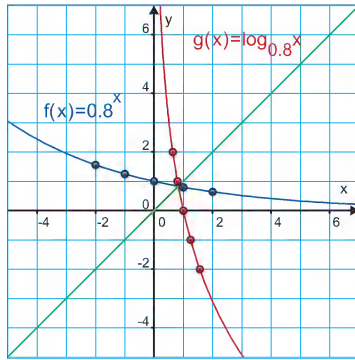
جیگۆڕکی بکە.

$g(x) = \log_3 x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$x$	-2	-1	0	1	2

بواری نەخشەی لۆگاریتمی  $g$  بریتییه لە  $\{x | x > 0\}$  و مەودایەکی  $R$ .

$$x = -3, 0, 1, 4, 7; f(x) = 0.8^x$$

ب



پوونکردنه وەى نەخشەى  $f(x) = 0.8^x$  بە بەکارهێنانى خستەى بەهاکان بکێشە.

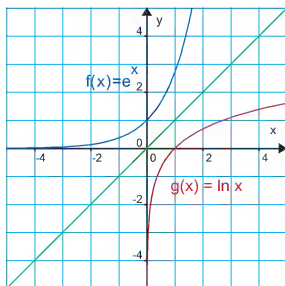
$x$	-3	0	1	4	7
$f(x) = 0.8^x$	2	1	0.8	0.4	0.2

بۆئەوێ پوونکردنه وەى نەخشەى لۆگاریتمى  $g(x) = \log_{0.8} x$  بکێشیت،  $x$  و  $f(x)$  لەخستەى سەرەوێ جێگۆڕکێ بکە.

$g(x) = \log_{0.8} x$	2	1	0.8	0.4	0.2
$x$	-3	0	1	4	7

بوارى نەخشەى لۆگاریتمى  $g(x)$  بریتىیه لە  $\{x | x > 0\}$  و مەودایەکەى  $R$ .

هەولبەدە بەهایەکانى  $x = -2, -1, 1, 2, 3$  بەکاربهێنە بۆکێشانی پوونکردنه وەى نەخشەى  $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ ، پاشان پوونکردنه وەى نەخشەى لۆگاریتمى پێچەوانە بکێشە، بوار و مەودای نەخشە لۆگاریتمىیەکە دیاریکە.



لۆگاریتمى سروشتى بریتىیه لە لۆگاریتم بە بنچینە  $e$ . هێمای  $\ln$  بۆ لۆگاریتمى سروشتى بەکاردههێنیت. ئەو لۆگاریتمە هەمان سێفەتەکانى لۆگاریتمى ئاسایى (دەیی) و لۆگاریتمەکانى دیکەى هەیە.

نەخشەى لۆگاریتمى سروشتى  $f(x) = \ln x$  بریتىیه لە نەخشەى لۆگاریتمى بەرامبەر نەخشەى توانى سروشتى. بریتىیه لە نەخشەى لۆگاریتمى بە بنچینە  $e$ . بوارەکەى کۆمەڵەى ژمارە راستىیه مۆجەبەکانە و مەودایەکەى کۆمەڵەى هەموو ژمارە راستىیهکانە پوونکردنه وەکشى لە بەرامبەردا دەرەکەوێت.

## نمونه

سادەکردنی برە توانی و لوگاریتمە سروشتییەکان

برەكە بەسادهترین شیۆه بنووسه.

ج  $e^{5\ln x}$

ب  $e^{\ln(x-1)}$

ا  $\ln e^{-2t}$

شیکار

$$e^{5\ln x} = e^{\ln x^5} = x^5$$

$$e^{\ln(x-1)} = x-1$$

$$\ln e^{-2t} = -2t$$

هەولبده

برەكە بەسادهترین شیۆه بنووسه.

ج  $\ln e^{x+4y}$

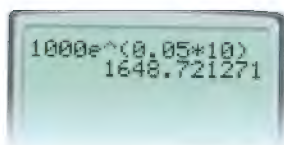
ب  $e^{2\ln x}$

ا  $\ln e^{3.2}$

بەگەرانهوه بۆ سوودی ئاوێته. یاسایەكە دەبیته  $A = pe^{rt}$  كاتێك پاشەكەوت بەردەوام دەبیته.

جییه جێکردن لە ئابووردیدا

یەك ملیۆن دینار بۆ ماوهی 10 سال بەسوودێك رێژهی سالانهكهی 5% بوو دانرا، كه پاشەكەوتكردهكه بەشیۆهی حساب بەردەوام بیته. حسابەكە پاش 10 سال دەبیته چەند؟



یاسایەكە

$$A = pe^{rt}$$

لەجیاتی دابنێ

$$A = 1000\ 000\ e^{0.05 \times 10}$$

بژمێر بەكاربهێنە

$$A \approx 1\ 648\ 720$$

حسابەكە پاش 10 سال و بەنزیکەیی دەبیته 1 648 720 دینار.

هەولبده

100 000 دینار پاش 8 سال دەبیته چەند، ئەگەر ئەو برە پارە لەحسابی بەردەوامی پاشەكەوت دانرا، بە سوودی سالانه رێژهكهی 3.5% بیته؟

## راھێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەگەر زانیت  $\log_{10} 5 = 0.6990$ ، پرونیبکەوه چۆن  $\log_{10} 0.005$  و  $\log_{10} 500$  هەژماردەکەیت.

2 جیاوازی نیوان نەخشەیی لوگاریتمی سروشتی و نەخشەیی لوگاریتمی ئاسایی بکە.

3 بەهای نەخشەیی لوگاریتمی لە  $x=1$  چەندە؟ ئەمە دەرئەنجام بکە، پرونکردنەوهی هەموو نەخشە لوگاریتییهکان بەخالیکی دیاریکراودا دەپوات، ئەو خالە دیاریبکە؟

## راهبانی ناراسته کراو

هاوکیښه توانییه که به شیوهی لؤگاریتمی بنووسه.

$$3^x = 243 \quad \text{7} \quad 10^{-2} = 0.01 \quad \text{6} \quad 4^{1.5} = 8 \quad \text{5} \quad 2.4^0 = 1 \quad \text{4}$$

هاوکیښه لؤگاریتمیه که به شیوهی توانی بنووسه.

$$\log_6 x = 3 \quad \text{11} \quad \log_{0.9} 0.81 = 2 \quad \text{10} \quad \log_x (-16) = 3 \quad \text{9} \quad \log_4 0.0625 = -2 \quad \text{8}$$

پوونکردنه وهی نه خشه که به به کارهینانی به ها دراوه کان بکیشه. پاشان پوونکردنه وهی نه خشه لؤگاریتمی پیچه وانه بکیشه. بوار و مه وادی نه خشه لؤگاریتمیه که دیاریبکه.

$$x = -2, -1, 0, 1, 2 : f(x) = 3^x \quad \text{13} \quad x = -2, -1, 0, 1, 1.5 : f(x) = 5^x \quad \text{12}$$

## راهبان و جیه جیکردن

هاوکیښه توانی به شیوهی لؤگاریتمی بنووسه.

$$4^{-1} = 0.25 \quad \text{17} \quad 1.2^0 = 1 \quad \text{16} \quad 6^x = 216 \quad \text{15} \quad x^{2.5} = 32 \quad \text{14}$$

هاوکیښه لؤگاریتمی به شیوهی توانی بنووسه.

$$\log_{\pi} \pi = 1 \quad \text{21} \quad \log_{4.5} 1 = 0 \quad \text{20} \quad \log_2 x = 6 \quad \text{19} \quad \log_5 625 = 4 \quad \text{18}$$

پوونکردنه وهی نه خشه که به به کارهینانی به ها دراوه کان بکیشه. پاشان پوونکردنه وهی نه خشه لؤگاریتمیه پیچه وانه که بکیشه بوار و مه وادی نه خشه لؤگاریتمیه که دیاریبکه.

$$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3 : f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \quad \text{23} \quad x = -2, -1, 0, 1, 2, 3 : f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x \quad \text{22}$$

$$\log 2 \approx 0.30 \quad \text{خه ملاندن} \quad \text{24} \quad \text{به کار بهینه بو خه ملاندنی } \log 200 \text{ و } \log 2000.$$

$$\text{کام له مانه بریتیه له شیوهی لؤگاریتمی } 2^7 = 128 \quad \text{25}$$

$$\log_2 7 = 128 \quad \text{ج} \quad \log_2 128 = 7 \quad \text{ا}$$

$$\log_7 128 = 2 \quad \text{د} \quad \log_7 2 = 128 \quad \text{ب}$$



## روانين بۆدواوه

26 هەلگەپاوهی پیزکراوهی  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$  بدۆزهوه؟

27 هاوکۆلکەى گەشەى گۆژمەى سېڤردراو بەسوودىك پڙهکەى %7.3 بېت چييه؟

## روانين بۆپيشهوه

28 سەرنجى ئەو ژمارانە بدە لە چەپەوه بۆ راست لىي بکۆلهوه:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

چۆن لەژمارەيەك دەچيت بۆ ژمارەيەكى تر بۆلاى راست بەدەستپيكردن لەژمارە 2 ؟  
ژمارەى دواى ژمارە 21 چەندە؟

# یه‌کبه‌دوای یه‌که‌کان Sequences

به‌شی

4

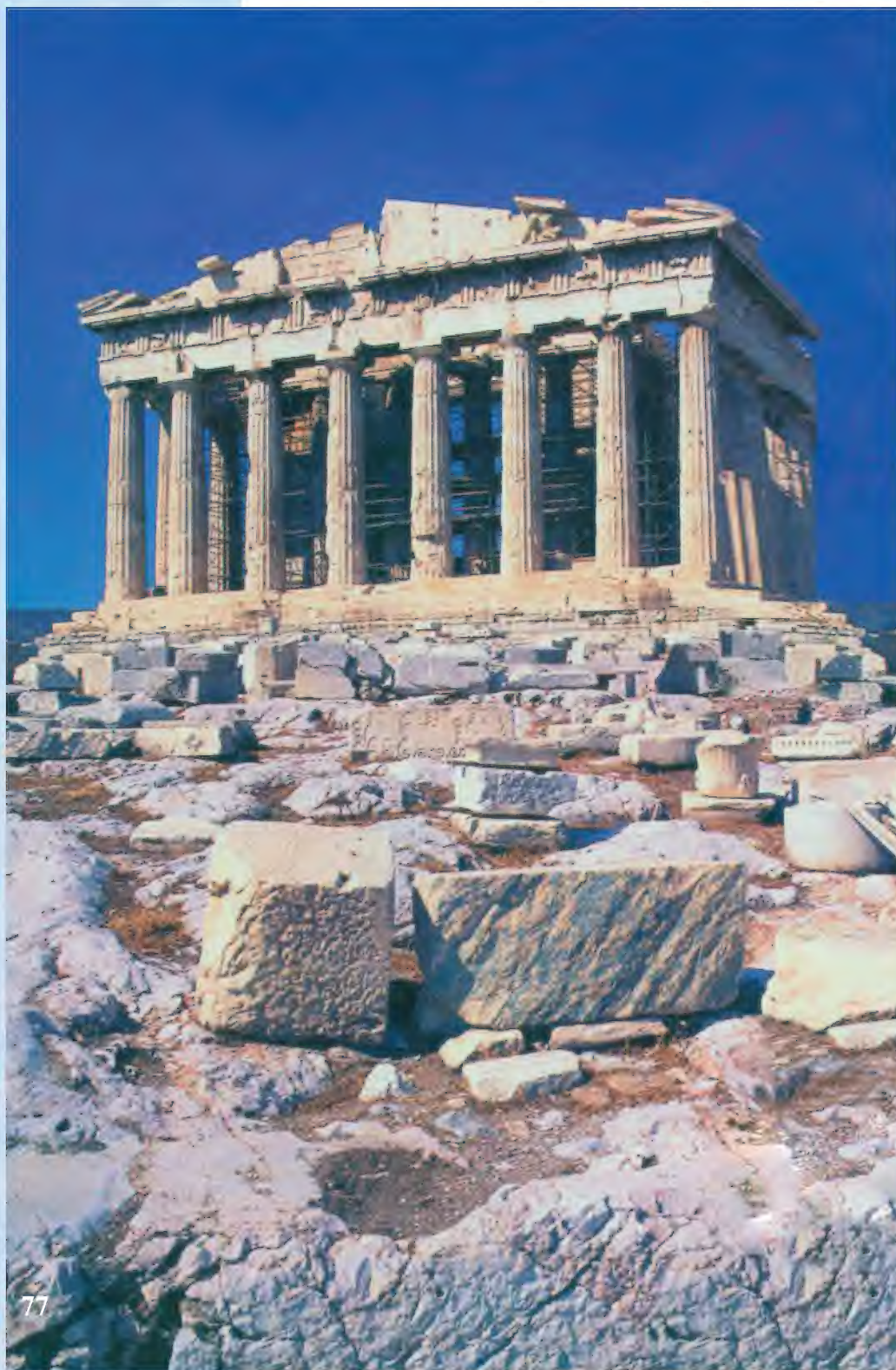
وانه‌کان

1. یه‌کبه‌دوای یه‌که

ژماره‌یه‌کان

2. یه‌کبه‌دوای یه‌که

نه‌ندازه‌یه‌کان





# يەكبەدواى يەكە ژمارەيەكان

## Arithmetic Sequences



يەكبەدواى يەكەكان بۇ دروستكردى  
نموونهكان بەكاردين بە مەبەستى  
ليكوئىنەوه لە ديارده سروشتيەكانى وەك  
گۆرانی ژمارەى كۆمەلەى كەرويشكەكان بە  
تيپەپوونى كات.



ژوان ئۆتۆمبىلىكى نوپى بە 17 750 000 دینار كړی، بەرپوهبەرایەتى باجى دەرامەت نرخى  
ئۆتۆمبىلەكەى ساڵ دواى ساڵ بەم شىوہیە دەخەملینئ:

ساڵ	1	2	3	4
نرخ	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000

ئەو ژمارانە يەكبەدواى يەك پيكدەهيئن، ھەر ژمارەيەك لەو ژمارانە پادەيەكە لە پادەكانى  
يەكبەدواى يەكەكە، لەوانەيە يەكبەدواى يەكەكە ژمارەيەكى ديارينەكراو پادەى ھەبئ و پيى  
دەوترئ يەكبەدوايەكى دوانەھاتوو، يان لەوانەيە ژمارەيەكى دياريكراو پادەى ھەبئ، لەم بارەدا  
پيى دەوترئ يەكبەدواى يەكى دواھاتوو وەك يەكبەدواى يەكى پيشوو. دەتوانيت يەكبەدواى يەك  
وەك نەخشەيەك سەير بكەيت، بوارەكەى لە ژمارە تەواوہ موجدەبەكان پيكدئ و مەودايەكەى  
كۆمەلەى ئەو ژمارانەيەكە پادەكانى پيكدەهيئن.

ئەوانەى لەبوارى بىركارى كاردەكەن لەجياتى نووسينى نەخشەى  $a(n)$  بۇ پادەكانى يەكبەدواى  
يەك،  $a_n$  بەكاردەهيئن بەژمارەى  $n$  دەوترئ خانەى پادەى  $a_n$  پادەى يەكەم بریتیيە لە  $a_1$  و پادەى  
دووم بریتیيە لە  $a_2$  . . . بەلام ئەو پادەى خانەكەى  $n$  بە بریتیيە لە  $a_n$  و پيى دەوترئ پادەى نونى  
 $n$  يەكبەدواى يەكە.

دوو جۆر يەكبەدواى يەك ھەيە گرنگى تايبەتيان ھەيە، يەكبەدواى يەكى جۆرى يەكەم بەوہ  
دەناسرئتەوہ كە جياوازی ھەر پادەيەك و پادەكەى پيش خۆى بەھايەكى نەگۆرە و پيى دەوترئ  
يەكبەدواى يەكى ژمارەيى. بەلام يەكبەدواى يەكى جۆرى دووم بەوہ دەناسرئتەوہ كە پيژەى ھەر  
پادەيەك بۇ پادەكەى پيش خۆى بەھايەكى نەگۆرە و پيى دەوترئ يەكبەدواى يەكى ئەندازەيى لەم  
وانەيەدا يەكبەدواى يەكى ژمارەيى و لە وانەى داھاتوو يەكبەدواى يەكى ئەندازەيى فيردەبيت.  
ئەگەر بگەرپيئتەوہ بۆئەو يەكبەدواى يەكەى لەسەرھتاي وانەكەدا ھاتووہ، جياوازی نيوان پادەكان  
بریتیيە لە:

$$16\,250\,000 - 17\,750\,000 = -1\,500\,000$$

$$14\,750\,000 - 16\,250\,000 = -1\,500\,000$$

$$13\,250\,000 - 14\,750\,000 = -1\,500\,000$$

بەمەش دەردەكەوئ يەكبەدواى يەكەكە ژمارەيە.

بەھاي نەگۆرى جياوازیيەكانى نيوان پادەكانى يەكبەدواى يەكەكە پيى دەوترئ بنچينە  
Common difference بنچينەى يەكبەدواى يەكەكەى پاردوو دەكاتە (1 500 000)

پادە	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
بەھا	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000

$$-1500\,000 \quad -1500\,000 \quad -1500\,000$$

### نامانجەكان

- پادەى داواكراو لە  
يەكبەدواى يەكەكى ژمارەيى  
دەدۆزئتەوہ.
- سەرچەمى بەشە كۆمەلەكان  
بۇ يەكبەدواى يەكى  
ژمارەيى دەدۆزئتەوہ.

### ژاواھكان Vocabulary

يەكبەدواى يەك  
Sequence

پادەى يەكبەدواى يەك  
Term of a sequence

يەكبەدواى يەكى دوانەھاتوو  
Infinite sequence

يەكبەدواى يەكى دواھاتوو  
Finite sequence

يەكبەدواى يەكى ژمارەيى  
Arithmetic sequence

# جیاکردنه‌وی یه‌کبه‌دوای یه‌که ژماره‌یه‌کان

دیاریکه ئایا یه‌کبه‌دوای یه‌که‌که ژماره‌یه‌کان یا نا، نه‌گه‌ر ژماره‌یه‌یه، بنچینه و پاده‌ی دوای پاده‌ی کۆتایی دراو بدۆزه‌وه.  $-3, 2, 7, 12, 17, \dots$

ا

پاده‌کان  $-3 \quad 2 \quad 7 \quad 12 \quad 17$

جیاوازییه‌کان  $5 \quad 5 \quad 5 \quad 5$

یه‌کبه‌دوای یه‌که‌که ژماره‌یه‌یه، بنچینه‌که‌ی ده‌کاته 5، پاده‌ی دوای

پاده‌ی کۆتایی دراو بریتیه له  $22 = 17 + 5$ .

ب

$-4, -12, -24, -40, -60, \dots$

پاده‌کان  $-4 \quad -12 \quad -24 \quad -40 \quad -60$

جیاوازییه‌کان  $-8 \quad -12 \quad -16 \quad -20$

یه‌کبه‌دوای یه‌که‌که ژماره‌یه‌ی نییه، چونکه جیاوازی نیوان پاده‌کان له‌گه‌ل پاده‌که‌ی

پیش خۆی نه‌گۆر نییه.

هه‌ولبد

دیاریکه ئایا یه‌کبه‌دوای یه‌که‌که ژماره‌یه‌یه یا نا، نه‌گه‌ر ژماره‌یه‌یه بنچینه‌که و نه‌و پاده‌ی دوای پاده‌ی کۆتایی دراو بدۆزه‌وه.

ا  $1.9, 1.2, 0.5, -0.2, -0.9, \dots$  ب  $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, \dots$

به‌های ئۆتۆمبیل‌ه‌که سالّ دوای سالّ	
$n$	$a_n$
1	$a_1 = 17\,750\,000 + 0 \times (-1500\,000)$
2	$a_2 = 17\,750\,000 + 1 \times (-1500\,000)$
3	$a_3 = 17\,750\,000 + 2 \times (-1500\,000)$
4	$a_4 = 17\,750\,000 + 3 \times (-1500\,000)$
5	$a_5 = 17\,750\,000 + 4 \times (-1500\,000)$

شۆوازی خشته‌ی به‌رامبەر بپشکنه. هه‌ر پاده‌یه‌ک ده‌کاته سه‌ره‌می پاده‌ی یه‌که‌م و یه‌که‌یک له‌چه‌ند جاره‌کانی بنچینه‌که.

پاده‌ی دووهم = پاده‌ی یه‌که‌م + بنچینه

پاده‌ی سێیه‌م = پاده‌ی یه‌که‌م +  $2 \times$  بنچینه و

هه‌روه‌ها ...

ده‌توانیت گشتانندی ئه‌م شۆوازه بکه‌یت به‌م یاسایه:

## یاسای گشتی یه‌که به‌دوای یه‌کی ژماره‌یه‌ی

پاده‌ی نونی یه‌کبه‌دوای یه‌که‌یک ژماره‌یه‌ی به‌م یاسایه هه‌ژماره‌که‌ریّت

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_m + (n-m)d$$

کاتی که  $a_1$  پاده‌ی یه‌که‌م و  $d$  بنچینه‌که‌ی بیّت.

## هه‌ژمارکردنی پاده‌ی نونی یه‌که به‌دوای یه‌که‌یک ژماره‌یه‌ی

پاده‌ی ده‌یه‌می یه‌کبه‌دوای یه‌کی ژماره‌یه‌ی  $32, 25, 18, 11, 4, \dots$  بدۆزه‌وه.

هه‌نگاوی 1 بنچینه‌ی یه‌کبه‌دوای یه‌که‌که بدۆزه‌وه  $d = 25 - 32 = -7$ .

هه‌نگاوی 2 پاده‌ی ده‌یه‌م به‌به‌کاره‌یانی یاسایه‌که هه‌ژماریه‌که.



$$\begin{aligned}
 & \text{ياسا} \quad a_n = a_1 + (n-1)d \\
 & \text{لهجياتى دابنى} \quad a_{10} = 32 + (10-1)(-7) \\
 & \text{سادىكه} \quad = -31
 \end{aligned}$$

پادهى دهيمى ئىم يىكهدهواى يىكه دهكاته 31-.

پاسادان بىكه ئىم يىكهدهواى يىكه تهواوبىكه.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_n$	32	25	18	11	4	-3	-10	-17	-24	-31

ههولبد

پادهى يانزهههمى ههريهك لهم يىكهدهواى يىكه ژمارهپپانه بدؤزهوه.

$$\begin{aligned}
 & \text{أ} \quad -3, -5, -7, -9, \dots \\
 & \text{ب} \quad 9.2, 9.15, 9.1, 9.05, \dots
 \end{aligned}$$

### نمونى

#### دؤزىنهوهى پاده ناديارهكان

پاده ناديارهكانى يىكهدهواى يىكه ژمارهپپى 17-, , , 11, بدؤزهوه. ههنگاوى 1 بنچينه بدؤزهوه.

$$\begin{aligned}
 & \text{ياسا} \quad a_n = a_1 + (n-1)d \\
 & \text{لهجياتى دابنى} \quad -17 = 11 + (5-1)d \\
 & \text{سادىكه} \quad -7 = d
 \end{aligned}$$

ههنگاوى 2 پاده ناديارهكان به بهكارهيننانى  $a_1 = 11$  و  $d = -7$  بدؤزهوه.

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 11 + (2-1)(-7) = 4 \\
 a_3 &= 11 + (3-1)(-7) = -3 \\
 a_4 &= 11 + (4-1)(-7) = -10
 \end{aligned}$$

ههولبد

«پاده ناديارهكانى يىكهدهواى يىكه ژمارهپپى 0, , , 2, بدؤزهوه.

لهبرئىوهى جياوازييهكانى نئوان ههر پادهيهك و پادهكهى پيش خوى يىكسانن، ئهوا زانىنى دوو پاده بهسه بؤ دؤزىنهوهى بنچينه.

### نمونى

#### دؤزىنهوهى پادهى نونى $n$ يىكهدهواى يىكهكى ژمارهپپى بهزانينى دوو لهپادهكانى

پادهى شهشههمى يىكهدهواى يىكه ژمارهپپيهك بدؤزهوه، ئهگهر زانيت  $a_9 = 120$  و  $a_{14} = 195$  ههنگاوى 1 بنچينه بدؤزهوه.

$$\begin{aligned}
 & \text{ياساى گشتى.} \quad a_n = a_1 + (n-1)d \\
 & \text{ياسا.} \quad a_{14} = a_1 + (14-1)d = a_1 + 13d \\
 & \text{ياسا.} \quad a_9 = a_1 + (9-1)d = a_1 + 8d \\
 & \text{ليدهريكه.} \quad a_{14} - a_9 = 5d \\
 & \text{لهجياتى دابنى.} \quad 195 - 120 = 5d \\
 & \text{شيكاريكه.} \quad 15 = d
 \end{aligned}$$

هەنگاوی 2  $a_1$  بدۆزەوه.

ياسا.  
لهجياتى دابنى.  
سادەبكه.  
شيكاربكه.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 120 &= a_1 + (9-1)(15) \\ 120 &= a_1 + 120 \\ 0 &= a_1 \end{aligned}$$

هەنگاوی 3 رادەى شەشەم  $a_6$  بدۆزەوه.

ياسا.  
لهجياتى دابنى.  
سادەبكه.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_6 &= 0 + (6-1)15 \\ &= 75 \end{aligned}$$

رادەى شەشەم لەم يەك بەدواى يەكە دەكاتە 75.

هەولبده

رادەى يانزەهەمى هەر يەك بەدواى يەكە ژمارەپيانە بدۆزەوه، ئەگەر زانیت.

$$\boxed{\text{ا}} \quad a_2 = -133 \text{ و } a_3 = -121 \quad \boxed{\text{ب}} \quad a_3 = 20.5 \text{ و } a_8 = 13$$

زۆرجار شيكارى پرسيارىك پۆيستی بە سەرجهمى چەند رادەيهكى سەرەتايى يەك بەدواى يەككى ژمارەپيانە دەبێت، بۆ نموونه پۆيستی بە سەرجهمى دە رادەى يەكەم دەبێت. ئەگەر سەرجهمى رادە يەكەمەكانت هەتا پلە  $n$  به  $S_n$  هيماکرد واتا:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

ئەوا

$$S_n = n \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

سەرجهمى رادە يەكەمەكانى يەكەدواى يەككى ژمارەپيانە		
بە وشە	بە ژمارە	بە جەبر
سەرجهمى رادە يەكەمەكانى يەكەدواى يەككى ژمارەپيانە بریتىيەلە ئەنجامى لىكدانى ژمارەپيانە ئەو رادانە لەناوەراستەى رادەى يەكەم و دوا رادە.	سەرجهم $2 + 4 + 6 + 8 + 10$ بریتىيەلە $S_5 = 5 \left( \frac{2+10}{2} \right) = 5(6) = 30$	$S_n = n \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right)$ كاتىك $n$ ژمارەپيانە رادەكانە و $a_1$ رادەى يەكەمە و $a_n$ دوا رادەيه.

دۆزینەوهى سەرجهمى بەشى يەكەدواى يەككى ژمارەپيانە

5

نموونه

سەرجهمى داواکراو لەهەريەك لەو زنجيرە ژمارەپيانە بدۆزەوه.

$$\boxed{\text{ب}} \quad S_{12} \text{ بۆ يەكەدواى يەككى رادەى نونى } a_n = 3 + 4n$$

هەنگاوی 1 دوو رادەى  $a_1$  و  $a_{12}$  بدۆزەوه.

$$a_1 = 3 + 4 \times 1 = 7$$

$$a_{12} = 3 + 4 \times 12 = 51$$

$$\boxed{\text{ا}} \quad S_{15} \text{ بۆ يەكەدواى يەكەكى } 25, 12, (-1), (-14), \dots$$

هەنگاوی 1 بنچينه بدۆزەوه.

$$d = 12 - 25 = -13$$

هەنگاوی 2 پادەي  $S_{12}$  بدۆزەوه.

$$\begin{aligned} S_{12} &= n \left( \frac{a_1 + a_{12}}{2} \right) \\ &= 12 \left( \frac{7 + 51}{2} \right) \\ &= 348 \end{aligned}$$

هەنگاوی 2 پادەي  $a_{15}$  بدۆزەوه.

$$\begin{aligned} a_{15} &= 25 + (15 - 1)(-13) \\ &= -157 \end{aligned}$$

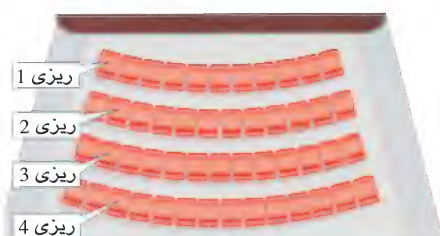
هەنگاوی 3 پادەي  $S_{15}$  بدۆزەوه.

$$\begin{aligned} S_{15} &= n \left( \frac{a_1 + a_{15}}{2} \right) \\ &= 15 \left( \frac{25 + (-157)}{2} \right) \\ &= 15 \left( \frac{-132}{2} \right) = -990 \end{aligned}$$

هەولبەدە سەرجهمی داواکراو لەهەریەک لەو زنجیرە ژمارەبیانە بدۆزەوه.

ب)  $S_5$  بۆ یەکەدواي یەکێک پادەي نونی  
 $a_n = 50 - 20n$  بێت.

ا)  $S_{16}$  بۆ یەکەدواي یەکی  
 $12, 7, 2, (-3), \dots$



## جییه جێکردن له شانۆیهکان

لەبائی ناوەراستی یەکێک لە شانۆ جیهانییهکان،  
 ژمارەي کورسییهکانی 14 پیزی یەکەمی یەک  
 بەدواي یەکێکی ژمارەيی پێکدەهێنن.

ا) ژمارەي کورسییهکانی پیزی 14 چەندە؟

تێبینیکە کە ژمارەي کورسییهکان لەپیزی بۆ پیزیکی تر یەک  
 زیاد دەکات، یاسایە کە بنوسه و  $a_1 = 11$  و  $d = 1$  بەکاربهێنە.

یاسای پادەي نونی بنوسه  
 لەجیاتی دابنێ

سادەبکە

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_{14} &= 11 + (14 - 1)(1) \\ &= 11 + 13 \\ &= 24 \end{aligned}$$

لەپیزی چواردهم 24 کورسی هەیه.

ب) ژمارەي کورسییهکانی پیزی یەکەم چەندە؟

$S_{14}$  بدۆزەوه بە بەکارهێنانی یاسای سەرجهمی پادەي یەکەمەکانی  
 یەکەدواي یەکی ژمارەيی

یاسا

لەجیاتی دابنێ

سادەبکە

$$\begin{aligned} S_n &= n \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right) \\ S_{14} &= 14 \left( \frac{11 + 24}{2} \right) \\ &= 14 \left( \frac{35}{2} \right) = 245 \end{aligned}$$

لە 14 پیزی یەکەم 245 کورسی هەیه.

هەولبەدە چۆن ئەگەر...؟ وا دابنێ ژمارەي کورسییهکانی هەر پیزی، لە پیزی دووهمهوه

دوو کورسی زیاترە لە پیزهکەي پێش خۆی.

ا) ژمارەي کورسییهکانی پیزی 14 چەندە؟

ب) ژمارەي کورسییهکانی 14 پیزی یەکەم چەندە؟

## بهردهو اميون له بير كاريدا

- 1 چوڼ پادهى نونى يهكبه دواى يهكى  $4, 2, 8, 14, \dots$  ددوژيته وه باسيبكه.
- 2 پرونيبكه وه بوچى برى پادهى نونى  $(n-1)d$  له خوډه گريټ به لام  $nd$  تيدانييه.
- 3 جياوازي نيوان يهكبه دواى يهكى ژماره يى و يهكبه دواى يهكى نه اندازه يى پرونيبكه وه.

## راڻينانى ناراسته كراو

دياريبكه ثايا يهكبه دواى يهكبه كه ژماره ييه يان نا، نه گهر ژماره ييه، بنچينه و پادهى دواى پادهى كوټايى بدوژه وه.

$$28, 21, 15, 10, 6, \dots \quad 46, 39, 32, 25, 18, \dots$$

$$3, 8, 13, 18, \dots \quad -3.2, -3.4, -3.6, -3.8, \dots$$

پاده نادياره كانى هر يهكبه دواى يهكبه كي ژماره يى بدوژه وه.

$$1.4, \dots, -1, \dots, 9, \dots, 37, \dots, 13, \dots, 25, \dots$$

پادهى نوپه مى هره يهك له يهكبه دواى يهكبه كه ژماره ييه بدوژه وه.

$$a_6 = -11, a_3 = -5 \quad a_4 = 12.6, a_3 = 12.2 \quad a_5 = 19, a_4 = 27$$

سهرجه مى داواكراو بدوژه وه.

$$S_{12} \quad S_{15} \quad 5, 9, 13, 17, \dots$$

16 كرى بلند دهستى به كار كردن كرد له يهكبه كه له كومپانيكانى زانيارى به موچه ي سالانه

برهكه ي 26 000 000 دينار به مخرجي موچه كه ي سالانه 1 250 000 دينار زياد بكات؟

ا موچه كه ي له سالى ششم دهبيته چنده؟

ب سهرجه مى نهو موچه ي له شش سالى يهكه وهريده گريټ چنده؟

## راڻينان و جيبه جيكردن

دياريبكه ثايا يهكبه دواى يهكبه كه ژماره ييه يان نا، نه گهر ژماره ييه، بنچينه و پادهى دواى پادهى كوټايى بدوژه وه.

$$-2, -12, -22, -32, -42, \dots \quad 288, 144, 72, 36, 18, \dots$$

پاده يازده مى هره يهك له يهكبه دواى يهكبه كه ژماره ييه بدوژه وه.

$$-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, \dots \quad 12, 11.9, 11.8, 11.7, \dots$$

پاده نادياره كانى هر يهكبه دواى يهكبه كي ژماره يى بدوژه وه.

$$-29, \dots, -2, \dots \quad 77, \dots, 33, \dots$$



پادەى دوازدهمى ھەرىكەت لەم يەككەدەى يەكە ژمارەبىيانە بدۆزەدە.

23  $a_5 = 16.2, a_4 = 18.4$  24  $a_8 = 46, a_4 = -2$  25  $a_{25} = -58, a_{22} = -49$

سەرجهمى داواكراو بدۆزەدە.

26  $S_{15}$  بۆ يەككەدەى يەكە  $S_{14}$  بۆ يەككەدەى يەكە پادەى نونى  
 $-18, -16, -14, \dots$   
 27  $a_n = 14 - \frac{1}{2}n$  بۆ يەككەدەى يەكە پادەى نونى

28 **بەكاربردن** كاژيان پۆشاكىكى بەقىست كرى، لەھەفتەى يەكەمدە 15000 دىنارى بە فروشپارەكەدا. لەگەڵ فروشپارەكە پۆشەوت ھەر ھەفتەىكە 5000 دىنار بۆ قىستەكە زيادىكات.

ا لەھەفتەى نۆيەمدا چەند پارە دەدات؟

ب سەرجهمى ئەو برە پارەى لەكۆتايى ھەفتەى نۆيەمدا داويەتى چەندە؟



29 **تەلار** ھەپمى لۆقەر لە پارىس لەبەردەم مۆزەخانەى لۆقەر لەھەشتايەكانى سەدەى بىستەمدا دروستكراو. ئەو ھەپمە بە پارچە شوشە بەندكرا. ھەپمەكە لەچەند ئاستىك پۆكديت، ئاستى سەرەوى لە 4 پارچە شوشە تىدايە ژمارەى پارچە شوشەكان تا بەرەو خواربەت 4 زيادەكات.

ا بەپىي  $n$  ژمارەى پارچە شوشەكان لە ئاستى  $n$  بنوسە.

ب ئەگەر ھەپمەكە لە 18 ئاست پۆكبھاتبايە. ژمارەى پارچە شوشەكان چەندە؟

ج لەراستىدا ژمارەى ئەو پارچە شوشانەى بەكارھاتوو 11 پارچە شوشە كەمترە لەو ھەژمارت كرد، بەھۆى دروستكردنى دەروازەىك بۆ چوونەو ناو ھەپمەكە. ژمارەى ئەو پارچە شوشانەى لەھەپمى لۆقەردا بەكارھاتوو چەندە؟



30 **زەويناسى** كيشوهرى ئەمريكايى باكوور سالانە لە كيشوهرى ئەوروپا دوور دەكەوێتەو.

ا پاش 50 سال كيشوهرى ئەمريكايى باكوور چەند لە ئەوروپا دوور دەكەوێتەو؟

ب پاش چەند سال دوو كيشوهرەكە بەلايەنى كەمەو 1 كم لەيەكترى دوور دەكەونەو.

## رواين بۆ دواو

دياريكە ئايا نەخشەكە نەخشەى گەشەيه يان نەخشەى ليژبوونەو.

31  $f(x) = 1.25(0.75)^x$  32  $f(x) = 1.43(5.32)^x$  33  $f(x) = 0.92(0.64)^x$

## رواين بۆ پيشەو

34 پادەى يەكەمى يەككەدەى يەكە دەكاتە 2. ھەر پادەيهكى تر دووئەوئەندەى پادەى پيش خۆيەتى. دە پادەى يەكەمى ئەو يەككەدەى يەكە بنوسە.

# يەكبەدواى يەكە ئەندازەيەكان

## Geometric Sequences



پلاتدانەرانى يارىيەوهرزىيەكان يەكبەدواى  
يەكە ئەندازەيەكان بۇ ديارىكردى ئمارەى  
يارىيەكان لەهەر خولىكدا بەكارديتن.

بۇجى

سىرىنا وليامز لەنۆوان 128 يارىكەردا لەتۆپى تىنسى پالەوانىتى كچان لە ويمبلدون Wimbledon سالى 2003 دا پلەى يەكەمى بەدەستەينا، لەكۆتايى هەريارىيەكى نۆوان دوو يارىكەر، يارىكەرى براو بەردەوام دەبىت بەلام دۆراوەكە دەچىتە دەرەو. ئەمەش ئەو دەگەينىت كە ئمارەى يارىكەرەكان لەكۆتايى هەر خولىكدا بۇ نيوە كەمدەكات. دەرگىت ئەو يارىكەرەكانەى لەكۆتايى هەر خولىكدا دەمىننەتەو بە بەكارهينانى يەكبەدواى يەكى ئەندازەيى ديارىيكرن.

لە يەكبەدواى يەكى ئەندازەيىدا Geometric sequence پىژەيى هەر پادەيك بۇ پادەيكەى پيش خوى نەگۆرە و جياوازە لە 1. بەو پىژەيە دەوترىت بنچينە Common ratio. بنچينەى يەكبەدواى يەكە ئەندازەيەكەى سەرەو برىتيە لە  $\frac{1}{2}$ .

خول	1	2	3	4
ئمارە	128	64	32	16

$$\frac{16}{32} = \frac{1}{2} \quad \frac{32}{64} = \frac{1}{2} \quad \frac{64}{128} = \frac{1}{2} \quad \text{پىژە}$$

بۇ ديارىكردى ئەو يەكبەدواى يەكە ئەندازەيە، پىژەى هەر پادەيك بۇ پادەيكەى پيش خوى هەژماربەكە ئەگەر ئەو پىژانە يەكسان بوون، يەكبەدواى يەكە دەبىتە ئەندازەيى.

### ئامانجەكان

- يەك بەدواى يەكە ئەندازەيەكان دەناسىت.
- پادەى داواكراو لە يەك بەدواى يەكى ئەندازەيى دەدۆزىتەو.
- بەشە سەرچەمەكانى يەك بەدواى يەكى ئەندازەيى دەدۆزىتەو.

### زاراوەكان Vocabulary

يەك بەدواى يەكى ئەندازەيى  
Geometric Sequence

## جياكرنەوەى يەكبەدواى يەكە ئەندازەيەكان

ديارىكە ئايا يەكبەدواى يەكە ئەندازەيە يان ئمارەيە يان هيتەر، ئەگەر ئەندازەيە، ئەو بنچينەكە و پادەى دواى ئەو پادەيەى لەكۆتايىدا دراوە بدۆزەو.

ج	ب	ا
6, 10, 15, 21, ...	8, 16, 24, 32, ...	8, 12, 18, 27, ...
6 10 15 21	8 16 24 32	8 12 18 27
جياواى	جياواى	جياواى
$\frac{4}{3}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{6}{5}$	$\frac{8}{2}$ $\frac{8}{3}$ $\frac{8}{4}$	$\frac{4}{2}$ $\frac{6}{2}$ $\frac{9}{2}$
پىژە	پىژە	پىژە
يەكبەدواى يەكەكە نە ئەندازەيە و نە ئمارەيە	يەكبەدواى يەككى ئمارەيە: بنچينە $d=8$ پادەى دوايى: 40	يەكبەدواى يەككى ئەندازەيە بنچينە $r=\frac{3}{2}$ پادەى دوايى: 40.5

ديارىكە ئايا يەكبەدواى يەكە ئەندازەيە يان نا، ئەگەر ئەندازەيە، ئەو بنچينە و پادەى دواى ئەو پادەيەى لەكۆتايىدا دراوە بدۆزەو.

ج	ب	ا
-50, -32, -18, -8, ...	1.7, 1.3, 0.9, 0.5, ...	$\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, \dots$

هەولبە

ھەر پادىيەكى يەككەدوۋى يەككە ئەندازىيە كە لە سەرەتاي وانەكەدا ھاتوۋە، برىتتيە لە ئەنجامى لىككەنى پادىيە يەككەم لە يەككەك لە ھىزەكانى بنچىنە وەك لەم خستەيە دەردەكەوئىت.

ژمارەى يارىكەرەكان لە ھەر خولكى وىمبلدون					
خول	1	2	3	4	$n$
ژمارەى يارىكەرەكان	128	64	32	16	$a_n$
پىسا	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

### ياساى گشتى يەككەدوۋى يەككە ئەندازىيە

پادىيە نونى  $a_n$  يەككەدوۋى يەككە ئەندازىيە بەم ياسايە ھەژماردەكرىت

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

كاتىك  $a_1$  پادىيە يەككەم و  $r$  بنچىنەكەى بىت.

بۇ دۆزىنەوۋى بنچىنە لە يەككەدوۋى يەككە ئەندازىيە، پادىيەك جگەلە پادىيە يەككەم دابەش پادىيە پىش خۆى بكة، ئەنجامى دابەشكرەنەكە دەبىتە بنچىنە.

### ھەژماركرەنى پادىيە نونى $n$ يەككەدوۋى يەككە ئەندازىيە

«پادىيە نۆيەمى يەككەدوۋى يەككە ئەندازىيە...  $-80, -20, 10, -5$  بدۆزەوۋە.

ھەنگاۋى 1 بنچىنەى يەككەدوۋى يەككەكە بە بەكارھىنانى ياسا بدۆزەوۋە  $-2 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = r$

ھەنگاۋى 2 پادىيە نۆيەم بە بەكارھىنانى ياسا ھەژماربە.

ياسا

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

لەجياتى دابىنى

$$a_9 = -5(-2)^{9-1}$$

سادەبە

$$a_9 = -5(256) = -1280$$

پادىيە نۆيەمى ئەم يەككەدوۋى يەككە دەكاتە  $-1280$

پاسادانبەكە ئەم يەككەدوۋى يەككە تەواوبەكە.

$$a_5 = -80$$

$$a_6 = -80(-2) = 160$$

$$a_7 = 160(-2) = -320$$

$$a_8 = -320(-2) = 640$$

$$a_9 = 640(-2) = -1280 \quad \checkmark$$

ھەولبەدە پادىيە نۆيەمى ھەريەك لەم يەككەدوۋى يەككە ئەندازىيەيە بدۆزەوۋە.

0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, ... ب

$\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \dots$  ا

دۆزىنەۋەدى رادەى نونى يەكەدەۋاى يەككىكى ئەندازەىى بەزانىنى دوو لە رادەكانى

رادەى دەيەمى يەكەدەۋاى يەككىكى ئەندازەىى بدۆزەۋە، ئەگەر زانیت  $a_5 = 96$  و  $a_7 = 384$

هەنگاۋى 1 بنچىنە بدۆزەۋە.

ياساى گشتى.

بەهاكەى لەجىياتى  $n$  دابنى.

بەهاكەى لەجىياتى  $n$  دابنى.

دابەش بکە.

لەجىياتى دابنى.

سادەبکە.

شىكاربکە.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = a_1 r^6$$

$$a_5 = a_1 r^{5-1} = a_1 r^4$$

$$\frac{a_7}{a_5} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^4} = r^2$$

$$\frac{384}{96} = r^2$$

$$4 = r^2$$

$$\pm 2 = r$$

هەنگاۋى 2  $a_1$  بدۆزەۋە.

لەھەر بارىك لەبارەكانى  $r$  بەتەنھا بکۆلەۋە.

ياسا

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

لەجىياتى دابنى

$$96 = 6(-2)^{5-1}$$

$$96 = a_1 (2)^{5-1}$$

سادەبکە

$$6 = a_1$$

$$6 = a_1$$

هەنگاۋى 3 رېئاساى يەكەدەۋاى يەك بنوسە و بەكارىبھيئە بۆ دۆزىنەۋەى  $a_{10}$

ياسا

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

لەجىياتى دابنى

$$a_n = 6(-2)^{n-1}$$

$$a_n = 6(2)^{n-1}$$

10 لەجىياتى  $n$  دابنى

$$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$$

$$a_{10} = 6(2)^{10-1}$$

سادەبکە

$$a_{10} = -3072$$

$$a_{10} = 3072$$

رادەى دەيەمى يەكەدەۋاى يەكەكە دەكاتە 3072 كاتىك  $v=2$  و  $-3072$  كاتىك  $v=-2$ .

هەولبەدە

رادەى خەفتەمى ھەريەكەدەۋاى يەككىكى ئەندازەىى بدۆزەۋە.

$$a_4 = 48 \text{ و } a_2 = 768 \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$a_5 = -40 \text{ و } a_4 = -8 \quad \boxed{\text{ا}}$$

زۆرچار شىكارى پرسىارىك پېويستى بەسەرجمى چەند رادەيەكى سەرەتاي يەكەدەۋاى يەككىكى ئەندازەىى دەبىت، بۆ نمونە پېويستىت بە سەرجمى دە رادەى يەكەم دەبىت. ئەگەر سەرجمى

رادە يەكەمەكانت ھەتا رادەى  $n$  بە  $S_n$  كرد واتا  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$

ئەۋا

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

سەرجمى رادە يەكەمەكانى يەكەدەۋاى يەككىكى ئەندازەىى

سەرجمى رادە يەكەمەكانى ( $S_n$ ) يەكەدەۋاى يەككىكى ئەندازەىى  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$

$$S_n = a_1 \left( \frac{1-r^n}{1-r} \right); r \neq 1$$

كاتىك  $a_1$  رادەى يەكەمى يەكەدەۋاى يەكەكە و  $r$  بنچىنەكەى بىت.



دۆزىنەۋى سەرجمى بەشى يەكەدۋاى يەكى ئەندازەبى

سەرجمى داۋاكرائو لەھەرىكە لەو زنجىرە ئەندازەبىيەنە بدۆزەۋە

**ا**  $S_7$  بۆ يەكەدۋاى يەكى  $3, (-6), 12, (-24), \dots$

ھەنگاۋى 1 رېژەى ھاۋبەش (بنچىنە) بدۆزەۋە.

$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$

ھەنگاۋى 2 رادەى  $S_7$  بدۆزەۋە كە  $a_1 = 3$  ۋ  $r = -2$  ۋ  $n = 7$

$S_n = a_1 \left( \frac{1-r^n}{1-r} \right)$

$S_7 = 3 \left( \frac{1-(-2)^7}{1-(-2)} \right)$

$= 3 \left( \frac{1-(-128)}{3} \right) = 129$

**ب**  $S_5$  بۆ يەكەدۋاى يەكى  $a_n = \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1}$  بېت.

ھەنگاۋى 1 رادەى  $a_1$  بدۆزەۋە.

$a_1 = \left( \frac{1}{3} \right)^{1-1} = \left( \frac{1}{3} \right)^0 = 1$

ھەنگاۋى 2 رادەى  $S_5$  بدۆزەۋە.

$S_n = a_1 \left( \frac{1-r^n}{1-r} \right)$

$S_5 = 1 \left( \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \right)$

$= \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} \approx 1.49$

ھەۋلېدە

سەرجمى داۋاكرائو لەھەرىكە لەو زنجىرە ئەندازەبىيەنە بدۆزەۋە.

**ا**  $S_8$  بۆ يەكەدۋاى يەكى  $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

**ب**  $S_6$  بۆ يەكەدۋاى يەكى  $a_n = (-3)(2)^{n-1}$  بېت.



جىيەجىكرىن لە ۋەرنىشدا

لەخولى ۋىمبلدون بۆ تۆپى تېنسى سەر زەۋى 128 يارىكەر بەشداريان كىرد. ژمارەى يارىكەرەكان لە كۆتايى ھەر خولىك بۆ نىۋەكە دەمىتتەۋە. چەند يارى لە پالەۋانىتتەكە ئەنجامدرا؟

ھەنگاۋى 1 يەكەدۋاى يەكەكە بنووسە.

$n = \text{ژمارەى خولەكان}$

$a_k = \text{ژمارەى يارىيەكانى خولى } k$

$S_n = \text{كۆى ژمارەى يارىيەكان لە } n \text{ خولدا.}$

خولى يەكەم 64 يارىيە، بۆيە  $64 = \frac{128}{2}$ ، لەبەرئەۋەى ژمارەى يارىيەكان  $a_n = 64 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$

لەھەر خولىكدا نىۋەى ژمارەى يارىيەكانى خولى پېشوو دەبېت.

ھەنگاۋى 2 ژمارەى خولەكان بدۆزەۋە.

خولى كۆتايى يەك يارى ئەنجام دەدرېت.  $1 = 64 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$

بەشى توانى لەبەرەكە جىياكەۋە، بە داپەشكرىن بەسەر 64 دا.  $\frac{1}{64} = \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$

$\frac{1}{64}$  بەشپەۋى توانېك لە توانەكانى  $\frac{1}{2}$  بنووسە.  $\left( \frac{1}{2} \right)^6 = \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$

تواناكان يەكسان بكة.  $6 = n - 1$

سادەبكة.  $7 = n$

ھەنگاۋى 3 كۆى گشتى يارىيەكان بدۆزەۋە.

ياساى سەرجمى زنجىرەى ئەندازەبى بەكاربھېتە.  $S_7 = 64 \left( \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \right) = 127$

لە خولەكە 127 يارى ئەنجام دراۋە.

هەولبەدە کۆمپانیایەکی گەورە ساڵانە 84 000 000 دینار کرێی بارمگایەکی دەدات، ئەو برێ ساڵانە 8% زیاددەکات لەماوەی 6 ساڵدا کۆمپانیایەکی چەند پارە دەدات؟

## راھێنان

### بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن رادەى نونى يەكبەدواى يەكى ئەندازەى ... 4, 12, 36, 108, ... دەدۆزیتەوه؟ باسیبکە.

2 پرونبکەوه بۆچی برى رادەى نونى  $r^{(n-1)}$  لەخۆدەگرێت بەلام  $r^n$  تێدانیه.

3 کەى رادەکانى يەكبەدواى يەكێكى ئەندازەى زیاد دەکات؟ و کەى کەمدەکات؟

### راھێنانى ئاراستە کراو

دیاریبکە ئایا يەكبەدواى يەكەکە ئەندازەى یان نا، ئەگەر ئەندازەى، بنچینه و رادەى دواى ئەو رادەى لەکۆتاییدا دراوه بدۆزەوه.

4 320, 80, 20, 5, ... 5  $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots$

رادەى دەیهەمى هەریەك لەم يەكبەدواى يەكە ئەندازەىیانە بدۆزەوه.

6 2, 6, 18, 54, 162, ... 7 5000, 500, 50, 5, 0.5, ...

رادەى شەشەمى هەریەك لەم يەكبەدواى يەكە ئەندازەىیانە بدۆزەوه بە زانینی دوو رادە لە رادەکانى

8  $a_5 = -4, a_4 = -12$  9  $a_5 = 108, a_2 = 4$  10  $a_5 = 12, a_3 = 3$

سەرجهەمى داواکراو بدۆزەوه.

11  $S_8$  بۆ يەكبەدواى يەكى 12  $S_8$  بۆ يەكبەدواى يەكێك رادەى

2, 0.2, 0.02, ... نونى  $a_n = (-3)^{n-1}$  بێت.

13 **مووچە** مامۆستایەکی زمان لە ساڵى يەكەمدا مووچەکەى 8 000 000 دینارە. ئەو

مووچەى ساڵانە بەرپزەى 5% زیاد دەکات، لە بیستەمین ساڵى خزمەتیدا مووچەکەى

دەبێتە چەند؟ لەو ماوەیدا چەندى وەرگرتوو؟

ا) مووچەکەى لە ساڵى شەشەم دەبێتە چەند؟

ب) سەرجهەمى ئەو مووچانەى لەشەش ساڵى يەكەم وەریدەگرێت چەند؟

### راھێنان و جێبەجێکردن

دیاریبکە ئایا يەكبەدواى يەكەکە ژمارەى یان ئەندازەى یان هیچیان نییە، ئەگەر

ژمارەى، بنچینه و رادەى دواى ئەو رادەى لەکۆتاییدا دراوه بدۆزەوه.

14 -36, -49, -64, -81, ... 15 -2, -6, -18, -54, ...

رادەى نۆیەمى هەریەك لەم يەكبەدواى يەكە ئەندازەىیانە بدۆزەوه.

16  $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \dots$  17 3, -6, 12, -24, 48, ...

رادەى حەفتمى هەریەك لەم يەكبەدواى يەكە ئەندازەىیانە بدۆزەوه بە زانینی دوو رادە.

18  $a_5 = 162, a_4 = 54$  19  $a_6 = -100, a_4 = -4$

سەرجهمى داواكراو لەھەر يەكبه‌وداى يەككى ئەندازەيى بدۆزەو.

20  $S_6$  بۆ يەكبه‌وداى يەككى  $5, 25, 125, \dots$  21  $S_7$  بۆ يەكبه‌وداى يەككى پادەي

نونی  $a_n = 8(10)^{n-1}$  بێت.

22 **باپیران** دایک و باوک و دوو باپیر و دوو داپیر و 4 بابی باپیر و 4 دایکی داپیرت ههیه.

ا ژماره‌ی باپیره‌گه‌وره و داپیره‌گه‌وره له‌ماوه‌ی 6 نه‌وه‌ی پێش تۆ چهنده؟

له‌ماوه‌ی 21 نه‌وه‌دا چهنده؟

ب **چی ده‌بێت نه‌گه‌ر...** ؟ رێسای هه‌ژمارکردنی باپیره‌کان و داپیره‌کان چۆن ده‌گۆرێت

نه‌گه‌ر تۆ يەكهم نه‌وه‌ بیت؟

23 **قیسته زانکۆیه‌کان** له‌پۆزی له‌دایکبوونی رووناک داپیری و باپیری برپاریاندا

قیسته‌کانی خویندنی زانکۆی بۆ بدن. له‌پۆزی له‌دایکبوونیدا 50 دیناریان بۆ دانا.

برپاریاندا هه‌ر سالێک دوو ئه‌وه‌نده‌ی ساله‌که‌ی پێشوی بۆ دابنێن، کاتێک رووناک ته‌مه‌نی

ده‌بێته 18 سال چهنه‌ پارهی بۆ کۆده‌بێته‌وه؟ که ته‌مه‌نی ده‌گاته 21 سال چهنه‌ پارهی بۆ

کۆده‌بێته‌وه؟

24 **ته‌کنۆلۆژیا** نامه‌یه‌کی ئه‌لیکترۆنیت به‌ده‌ست گه‌یشته، تێیدا داواى به‌ختیکی باشت بۆ

ده‌کات، داواى لێکردوویت بۆ 5 هاوڕێت بێنێریت، و داوا له‌هه‌ر يەكکيان بکه‌یت له‌لای

خۆیا نه‌وه‌ بۆ 5 هاوڕێی تری بێنێن هه‌روه‌ها ... ژماره‌ی نامه‌کان پاش 10 ئاست ده‌بێته چهنه‌.

25 ده‌زگایه‌ک باره‌گایه‌کی به‌کری گرت به‌ کریی مانگانه‌ی 750 000 دینار له‌ سالێ يەكهم، ئه‌و

بره‌ پاره‌ سالانه‌ به‌رپێژه‌ی 10% زیاده‌کات پاش سالێ يەكهم.

ا يەكبه‌وداى يەكک بنووسه، ئه‌و بره‌ پارهی ده‌زگایه‌که سالانه‌ ده‌یات له 5 سال بنوینیت.

ب سەرجهمى ئه‌و بره‌ پارهی ده‌زگایه‌که له‌ماوه‌ی 10 سال ده‌یات بدۆزه‌وه.

26 **پزیشکی** يەكک له‌ نه‌خۆشخانه‌کان 16 نه‌خۆشی ئه‌نفۆلۆزای له‌ هه‌فته‌ی يەكهم و 56

نه‌خۆش له‌ هه‌فته‌ی دووهم و 196 نه‌خۆش له‌ هه‌فته‌ی سێیه‌م تۆمارکرد.

ا يەكبه‌وداى يەكکى ئه‌ندازەيى بدۆزه‌وه، ژماره‌ی تووشبووان به‌ نه‌خۆشی ئه‌نفۆلۆزا

بنوینیت.

ب ئه‌گه‌ر تووشبووان به‌ نه‌خۆشییه‌که به‌ هه‌مان شێوه‌ زیاديکرد، له‌کام هه‌فته‌ سەرجهمى

تووشبووان ده‌گاته 10 000 ؟

27 **بنووسه** چی پرووده‌ات له‌ پاده‌کانی يەكبه‌وداى يەكکى ئه‌ندازەيى، ئه‌گه‌ر پادەي يەكهمى 3

ئه‌وه‌نده چهنه‌جاره‌ بوو؟ سەرجهمى پاده‌ يەكهمه‌کانی چی به‌سه‌ردییت؟

## روانین بۆ دواوه

سەرجهمى ده‌ پادەي يەكهمى هه‌ر يەكبه‌وداى يەكکى ژماره‌يى بدۆزه‌وه.

28  $78, 65, 52, 39, 25, \dots$  29  $1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1, \dots$

## روانین بۆ پێشه‌وه

داتاشراوی هه‌ر پاده‌یه‌ک بدۆزه‌وه.

30  $f(x) = 4x^3$  31  $f(x) = x^{-3}$  32  $f(x) = 2x^7$



# جیاکاری و ته‌واوکاری

## Differentiation and Integration

به‌شی

5



وانه‌کان

1. جیبه‌جیکردنه‌کانی  
جیاکاری له نابووریدا
2. ته‌واوکاری



# جیټه جیکړنه کانی جیاکاری له ئابووریدا

## Applications of Differentiation to Economics



نڅښه کان بؤ دروستکړنی نمونښی بیرکاری  
به کار دین وک نه خښی خستنه پرو و نه خښی  
خواست و نه خښی قازانج و گه لیکي تر  
نابوریناسان نه و نه خښانه و داتاشراو دکانیان  
بؤ لیکولینه وی نه و نمونانه به کار دهینن.



له پوځی یازدهدا فیروبوویت چوڼ داتاشراوی نه خښه یه ک ددوژیته وه. به بیرری خوټ بهینه وه که  
داتاشراوی نه خښه بریتیه له نه خښه یه ک به به کارهینانی داتاشراوه بنه پرتیه کان و پړسایه کانی  
داتاشراو ددوژریته وه. له خښته ی خواره وه نه و داتاشراوه بنه پرتیه یانه ی زور به کار دین له پوځی  
یازده و دوازه دا ددرده که ویت.

داتاشراو	نه خښه
$f'(x) = 0$	$f(x) = c$ , $c$ ژماره یه کی پاستیه
$f'(x) = nx^{n-1}$ , $n$ ژماره یه کی پاستیه	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln x$
$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$f(x) = \ln(g(x))$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$f(x) = g'(x)e^{g(x)}$	$f(x) = e^{g(x)}$

له خښته ی خواره وه هندی ک پړسایه کانی داتاشراو ددرده که ویت.

داتاشراو	ناوی پړسا
$(af(x))' = af'(x)$	پړسای لیکدان له ژماره
$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$	پړسای داتاشراوی سهرجه م
$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$	پړسای داتاشراوی جیاوازی
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	پړسای لیکدان
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$	پړسای دابه شکردن
$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$	پړسای نه خښه ی نه خښه

وانه ی

1

نامانجه کان

• هه ژمارکړنی جیاکاری

بؤ دوژینه وه ی پړوانه  
په راوړیزیه کان و به پړی  
(ناچیکړی) له ئابووریدا  
جیټه جیټه کات.

• داتاشراو بؤ دوژینه وه ی

به هایه کانی گه وره ترین و  
بچووکترین  
به کار دهینن.

ژاروامکان  
Vocabulary

پړوانه په راوړیزه کان  
Marginal Measures

به پړی (ناچیکړی)  
Elasticity

به های گه وره ترین خوچیی  
Local maximum

به های بچووکترین خوچیی  
Local minimum

تاقیکړنه وه ی داتاشراوی په که م  
Test of first derivative

داتا اشاروی ہر ایک لہم نہ خشانہی دین بدوزہوہ.

$$f(x) = 3x^4 \quad \text{ا} \quad f(x) = 5x^4 - 2x^3 \quad \text{ب} \quad f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ج} \quad f(x) = e^{-2x} \quad \text{د}$$

شیکار

$$f'(x) = (3x^4)' = 3(x^4)' = 3(4x^3) = 12x^3 \quad \text{ا}$$

$$f'(x) = (5x^4 - 2x^3)' = (5x^4)' - (2x^3)' = 5(x^4)' - 2(x^3)' \\ = 5(4x^3) - 2(3x^2) = 20x^3 - 6x^2 \quad \text{ب}$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x}\right)' = 3\left(\frac{1}{x}\right)' = 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ج}$$

$$f'(x) = (e^{-2x})' = (-2x)'e^{-2x} = (-2)e^{-2x} = -2e^{-2x} \quad \text{د}$$

ہولبدہ

داتا اشاروی ہر ایک لہم نہ خشانہی دین بدوزہوہ.

$$f(x) = 5x^7 \quad \text{ا} \quad f(x) = 3x^6 - 3x^2 \quad \text{ب} \quad f(x) = \frac{-2}{x} \quad \text{ج} \quad f(x) = e^{3x} \quad \text{د}$$

### پیوانہ پراویزہ کار لہابووریدا

لہچالاکییہ کارنی دہزگایہ کارنی پیشہ سازی و بازگانیدا، دہتوانریت سی شت جیابکریتہوہ:   
 تیچوونہ کار Cost (بریتیہ لہ تیچوونی دہزگایہ بۆ راپہراندنی کارہ کارنی) و دہستکوتہ کار   
 Revenues (بریتیہ لہ دہستکوتہ کارنی دہزگایہ لہ نہجامی کارہ کارنی) و قازانجہ کار Profits   
 (بریتیہ لہو برہ پارہیہی بۆ دہزگایہ دہمینیتہوہ پاش لیڈہرکردنی تیچوونہ کار لہ   
 دہستکوتہ کار).

لہپولی یازدہدا زانیت کہ باسکردن لہپیوانہی پراویز دہگرپیتہوہ بۆ داتا اشار: تیچوونی پراویز   
 Marginal cost بریتیہ لہ داتا اشاروی نہخشہی تیچوون، دہستکوتی پراویز Marginal revenue   
 بریتیہ لہ داتا اشاروی نہخشہی دہستکوت (داهات)، قازانجی پراویز Marginal Profit بریتیہ لہ   
 داتا اشاروی نہخشہی قازانج، لہبیرت بیت کہ پیوانہی پراویز گۆرانی پیوانہی گشتی بہزیادبوونی   
 ہیئندہک یہک یہک دہر دہرپیت، نمونہ: تیچوونی پراویز لہئاستیکی دیاریکراوی بہرہم (500 بۆ   
 نمونہ) بریتیہ لہ گۆران لہ تیچوونی گشتی کاتیک بہرہم یہک یہک زیاد دہکات و اتا کاتیک   
 دہبیتہ 501. دوو ہوکار دہستکوت  $R$  دیاریدہکات: ژمارہی یہک فروشراوہ کار  $Q$  و نرخ یہک   
 یہک  $P$ ، بہمہش  $R = P \times Q$ . بہلام دوو شت تیچوون دیاریدہکات: تیچوونی گۆراو Variable cost   
 کہ بریتیہ لہ نہخشہی بہپی ژمارہی یہک کارنی بہرہم، و تیچوونی نہگۆر Fix cost کہ ناگۆرپیت   
 بہگۆرانی ژمارہی ئەو یہکانہ.

### 2 دۆزینہوہی نہخشہی قازانجی پراویز

کۆمپانیای زپ یہک جۆرہ قوتوی زہیتون دہفرۆشیت. نہخشہی خواست بۆئو جۆرہ زہیتونہ

$$P(Q) = 20000 - \frac{Q}{10} \quad \text{بریتیہ لہ:}$$

(لہبیرت بیت کہ نرخ دہگۆرپیت بہگۆرانی داواکاری (خواست) بۆ قوتوہ زہیتونہ کار بہپی یاسای   
 خواست و خستہ پروو)،  $Q$  ہیماہی بۆ ژمارہی قوتوہ فروشراوہ کار و  $P$  ہیماہی بۆ نرخ یہک قوتو.   
 لہلایہکی تر، نہخشہی تیچوون بریتیہ لہ  $C(Q) = 50000 + 3000Q$

ا ژماره‌ی 50 000 له‌نەخشە‌ی تێچوون چى دەنویئیت؟

ژماره‌ی 3 000 له‌هه‌مان نەخشە چى دەنویئیت؟

ب نەخشە‌ی قازانج بدۆزەوه.

ج نەخشە‌ی قازانجى په‌راویز بدۆزەوه.

### شیکار

ا ژماره‌ی 50 000 له‌نەخشە‌ی تێچوون، بریتییە له تێچوونی کۆمپانیایه‌که ژماره‌ی قوتوه فروشراوه‌کان هه‌ر چەند بێت. که تێچوونیکی نه‌گۆره به‌لام 3 000 بریتییە له تێچوونی کرینی یه‌ك قوتو.

ب قازانج بریتییە له ئەنجامی لێدەرکردنی تێچوون له داهاات، نەخشە‌ی دەستکەوت بریتییە له:

$$R(Q) = P \times Q = 20\,000Q - \frac{Q^2}{10}$$

که‌واته نەخشە‌ی قازانج بریتییە له:

$$S(Q) = 20\,000Q - \frac{Q^2}{10} - (50\,000 + 3\,000Q)$$

$$S(Q) = 17\,000Q - \frac{Q^2}{10} - 50\,000$$

ج نەخشە‌ی قازانجى په‌راویز بریتییە له  $S'(Q) = 17\,000 - \frac{Q}{5}$ .

### هه‌ولبده

کارگه‌ی فرات یه‌ك جوړ له‌قوتوه کونجی ده‌فروشیئ، نەخشە‌ی خواستنی ئەم جوړه قوتوه

بریتییە له

$$P(Q) = 17\,000 - \frac{Q}{20}$$

(له‌بیرت بێت که نرخ ده‌گۆرێت به‌گۆرانی یاسای خواست و خستنه‌پروو) کاتێک  $Q$  هێمایه‌ بۆ ژماره‌ی قوتوه فروشراوه‌کان، و  $P$  هێمایه‌ بۆ نرخى یه‌ك قوتو، له‌لایه‌کی تر، نەخشە‌ی تێچوون بریتییە له:

$$C(Q) = 30\,000 + 8\,000Q$$

ا ژماره‌ی 30 000 له‌نەخشە‌ی تێچوون چى دەنویئیت؟

ژماره‌ی 8 000 له‌هه‌مان نەخشە چى دەنویئیت؟

ب نەخشە‌ی قازانج بدۆزەوه.

ج نەخشە‌ی قازانجى په‌راویز بدۆزەوه.

### به‌پێزی (ناچێگیرى) له ئابووریدا

به‌کالا‌یه‌ك ده‌ووتریئ به‌پێزه Elastic ئەگه‌ر خواست له‌سه‌رى زیاد بکات یان که‌مبکات به‌شێوه‌یه‌کی دیار له‌ئەنجامی دابه‌زینی یان زیادبوونی نرخه‌که‌ی. ئابووریناسان به‌پێزی کالا‌یه‌ك له نەخشە‌ی خواست له‌سه‌رى پێوانه ده‌کەن ئەگه‌ر  $P(Q)$  نەخشە‌ی خواست بێت، ئەوا به‌پێزی بریتییە له  $e = \frac{P}{Q} \times \frac{1}{P'(Q)}$  و واى دادەنێین که کالا‌یه‌ك به‌پێزه ئەگه‌ر  $|e| > 1$  و به‌پێز نییه ئەگه‌ر  $|e| < 1$ .

### دۆزىنەۋەى بەپىزى كالايەك

نەخشەى خواست بۇ كالايەك برىتييه لە  $P(Q) = 50 + Q - Q^2$  بەپىزى ئەو كالايەك لە  $Q = 4$  بدۆزەۋە.

#### شىكار

$$P'(Q) = 1 - 2Q \quad P(4) = 50 + 4 - 4^2 = 50 + 4 - 16 = 50 - 12 = 38$$

$$e = \frac{P}{Q} \times \frac{1}{P'(Q)} = \frac{38}{4(-7)} = -\frac{38}{28} \quad P'(4) = 1 - 2 \times 4 = 1 - 8 = -7$$

$$|e| = \left| -\frac{38}{28} \right| = \frac{38}{28} > 1$$

نەخشەى خواست بۇ كالايەك برىتييه لە  $P(Q) = 10 + 2Q - 3Q^3$  بەپىزى ئەو كالايەك لە  $Q = 10$  چەندە؟

هەولبەدە

### دۆزىنەۋەى بەھاكانى نەۋپەرى

دۆزىنەۋەى بەھاى ئەۋپەرى جىبەجىكردى بىنەپەتى جىاكارى پىكەدەھىننى و زۆرتىن بەكارهينانى ھەيە. بۇ نموونە: دىارىكردى ژمارەى كارمەندانى كارگەيەك كاتىك قازانجەكەى ئەۋپەرى بىت، يان كەمكردەۋەى كارمەندەكانى كاتىك تىچوونەكەى دەگاتە ئەۋپەرى نزمى. بۆئەمە، جىاكارى رىسايەكمان دەداتى پى دوترىت رىساي داتاشراۋى يەكەم.

#### رىساي داتاشراۋى يەكەم

ئەگەر نەخشەى  $f(x)$  بەھاكانى ئەۋپەرى ھەبىت (گەرەتتىن يان بچوكتىن) لە  $x = c$  ئەۋا  $f'(c) = 0$  پىناسەنەكراۋە يان  $f'(c) = 0$ .

كەۋاتە بۇ دۆزىنەۋەى بەھاكانى  $x$  كە بەھاى ئەۋپەرى نەخشەكە دەستەبەر دەكات، بەھاكانى  $x$  بدۆزەۋە كە پاسادانى  $f'(x) = 0$  دەكات.

پىدراۋەكانى نموونەى 2 بەكاربەنە بۇ دىارىكردى ئەۋ ھىندەى كە گەرەتتىن قازانج بۇ كارگەكە دابىن دەكات. نرخی قوتويەك چەندبىت كە گەرەتتىن قازانج بەدەستىنىت؟ ئەۋ قازانجە چەندە؟

#### شىكار

نەخشەى قازانج لە نموونە 2 برىتييه لە

$$S(Q) = 17000Q - \frac{Q^2}{10} - 50000$$

بۇ دىارىكردى ئەۋ ھىندەى گەرەتتىن قازانج بۇ گارگەكە دابىن دەكات، داتاشراۋ بدۆزەۋە

$$S'(Q) = 17000 - \frac{Q}{5}$$

پاشان ھاۋكىشەى  $S'(Q) = 0$  شىكارىكە و ئەمەت دەستەكەۋىت

$$Q = 17000 \times 5 = 85000$$

كەۋاتە فروشتىنى 85 000 قوتو زەيتون گەرەتتىن قازانج دابىن دەكات.



نرخى يەك قوتو زەيتون كە گەورەترىن قازانچ دابىن دەكات برىتيەلە

$$P(Q) = 20\,000 - \frac{Q}{10} = 20\,000 - \frac{85\,000}{10} = 20\,000 - 8\,500 = 11\,500$$

ۋاتا 11 500 دىنار. گەورەترىن قازانچ برىتيەلە

$$S(Q) = 17\,000 \times 85\,000 - \frac{(85\,000)^2}{10} - 50\,000 = 722\,450\,000$$

ۋاتا 722 450 000 دىنار.

## هەولبدە

ھۆشيار لۆرىيەكى ھەيە و 5 000 دىنار كرى دەدات بە شوفېرەكە لەھەر كاتژمېرىكدا. تېچوونى ئىشكردى لۆرىيەكە  $\frac{v^2}{50}$  دىنارە لەيەك كىلۆمەتردا. كاتېك ۷ ھىمايە بۆ خېرايى لۆرىيەكە بە كىلۆمەتر لە كاتژمېرىكدا، خېرايى چەند بېت لۆرىيەكە كەمترىن تېچووى دەبېت.

## راھىيانان

### بەردەوامبوون لە بىر كارىدا

1 پەيوەندى نۆوان دەستكەوت و تېچوون و قازانچ باسبەكە.

2 ئەگەر نەخشەى  $C(Q) = 0.025Q^3 - 0.05Q^2 + 12.4Q + 22$  نەخشەى تېچوونى بەرھەمھېنانى كالا يەكى ديارىكراو بېت بەپېى ھېندى بەرھەمھېنراو  $Q$ . نەخشەى  $Av(Q)$  بەپېى  $Q$  بنووسە، كە تېچوونى ناوھراستى بەرھەمھېنانى يەك يەكە بنوئىت.

3 نموونەيەك بەھنەوہ بۆ كالا يەك بەپېزىيەكەى زۆرچووك بېت.

### راھىيانى ئاراستە كراو

داتاشراوى ھەر نەخشەيەك بدۆزەوہ.

$$f(x) = x^{17} + 5x^6$$

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$f(x) = x^{-2}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^7}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 7}{4 - x}$$

$$f(x) = 2x^5 + 7x - 4$$

12 نەخشەى  $R(Q) = 25Q - 0.05Q^2$  نەخشەى داھات (دەستكەوت) (بەھەزاران دىنار) بۆ كالا يەكى ديارىكراو پېكەھېنېت، كاتېك  $Q$  ژمارەى يەكە فروشراوہكان دەنوئىت.

ا  $R(50)$  بدۆزەوہ، ئەو وەلامە چى دەگەينېت، باسبەكە.

ب نەخشەى داھاتى پەراوئز  $R_M(Q)$  بدۆزەوہ.

ج داھاتى پەراوئز لە  $Q = 50$  بدۆزەوہ. وەلامەكە چى دەگەينېت بەپېى فروشتنى يەكەيەكى زيادە؟

د  $R(51) - R(50)$  بدۆزەوہ، پاشان دياربەكە كە ئەو جياوازىيە چى دەگەينېت؟

داتاشراوی هر نهخشهیهك بدۆزهوه.

$$f(x) = (2x^2 + 3x - 7)(4x - 6) \quad 14$$

$$f(x) = x^{-4} + 3x^4 - x + 16 \quad 13$$

$$f(x) = e^{2x-1} \quad 16$$

$$f(x) = (4x-1)^5 \quad 15$$

$$f(x) = \ln(0.1x) \quad 18$$

$$f(x) = 2x - 4e^{-x} + 7 \quad 17$$

19 نهخشه  $P(Q) = 160 - 0.1Q$  نهخشه ی خواست (بههزاران دینار) بۆ کالایهکی دیاریکراو پیکدههینیت، کاتیک  $Q$  ژماره ی یهکهکان بیت، و  $P$  نرخ یهکه بیت.

ا نهخشه ی داهات بۆ فروشتنی  $Q$  یهکه بدۆزهوه، داهاتی ئهجام له فروشتنی 500 یهکه چهنده؟

ب داهاتی پهراویزی فروشتنی 500 یهکه بدۆزهوه و پرونیبکهوه.

ج کامیان گهورهترین داهات دابین دهکات: فروشتنی یهکهیهکی سهربار له ئاستی فروشتنی 500 یان له ئاستی فروشتنی 700 ؟

20 نهخشه ی  $C(Q) = 300 + 6Q + \frac{1}{20}Q^2$  نهخشه ی تیچوون (بههزاران دینار) بۆ کالایهکی دیاریکراو پیکدههینیت، کاتیک  $x$  ژماره ی یهکه بهره مهاتوهکان بیت؟

ا تیچوونی پهراویز له  $Q = 8$  دا بدۆزهوه، ئه و وهلامه چی دهگهیهنیت بۆ بهره مهینانی یهکه یهکه ی سهربار؟

ب  $C(9) - C(8)$  بدۆزهوه. تیچوونی راسته قینه ی بهره مهینانی یهکه ی نویه م چهنده؟

21 نهخشه ی  $R(Q) = 46Q$  نهخشه ی داهات (بههزاران دینار) بۆ بهره مهینانی کالایهکی دیاریکراو پیکدههینیت، کاتیک  $Q$  ژماره ی یهکه فروشراوهکان بیت و نهخشه ی  $C(Q) = 100 + 30Q + \frac{1}{10}Q^2$  نهخشه ی تیچوون پیکدههینیت.

ا نهخشه ی قازانج  $S(Q)$  بدۆزهوه.  $S(100)$  بدۆزهوه. **ب**

ج نهخشه ی قازانجی پهراویز بدۆزهوه.

د قازانجی پهراویز له  $x=100$  بدۆزهوه. ئه و وهلامه چی دهگهیهنیت به پیی بهره مهینانی یهکه یهکی سهربار؟

ه  $S(101) - S(100)$  بدۆزهوه. ئه م جیاوازییه چی دهگهیهنیت؟ پرونیبکهوه.

22 نهخشه  $R(x) = \frac{50x}{x^2+36}$  که  $x \geq 0$  نهخشه داهاټی هفتانه به ملیاره‌ها دینار دنوینیت بو فیلمیکی سینمایی به‌پیی  $x$ ، که  $x$  ژماره‌ی ئه‌و هفتانه‌ی به‌سەر نمایشکردنی تیپه‌رپوو دنوینیت.

ا ئه‌و به‌هایانه‌ی که داهاټی په‌رویز (المدخول الهامشی) ده‌کاته سفر بدۆزه‌وه.

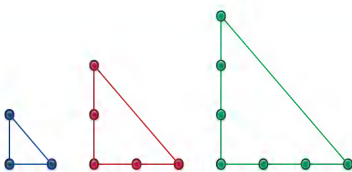
ب له‌کام ههفته داهاټی نمایشکردنی فیلمه‌که گه‌یشته ئه‌وپه‌ری به‌رزی؟

23 نهخشه‌ی داهاټه بو کاله‌یه‌ک بریتییه  $R(Q) = 24Q - 0.01Q^2$  کاتیک  $Q$  ژماره‌ی یه‌که فرۆشراوه‌کان دنوینیت. نهخشه‌ی داهاټی په‌راویز بدۆزه‌وه. به‌های داهاټی په‌راویز ده‌بیته چه‌ند کاتیک ئاستی فرۆشراو 100 یه‌که بیته؟ واتای ئابووری ئه‌و به‌هایه چییه؟

24 نهخشه‌ی  $R(Q) = \frac{3000}{2Q+2} + 80Q - 1500$  نهخشه‌ی ده‌ستکوت (به‌هه‌زاران دینار) بو فرۆشتنی  $Q$  یه‌که له کالایه‌کی دیاریکراو پیکده‌هینیت، ده‌ستکوتی په‌راویز کاتیک ئاستی فرۆشتن 149 یه‌که بیته بدۆزه‌وه.

25 سه‌رکه‌وتنی فیلمیکی باش که به‌پاره‌یه‌کی که‌م به‌ره‌مه‌اتبوو ده‌وه‌ستیتته سه‌ر ریکلامی زاره‌کی. ئه‌گه‌ر نهخشه‌ی  $A(x) = \frac{100x}{(x+10)^2}$  ژماره‌ی بینهره‌کانی ئه‌و فیلمه‌ پاش  $x$  ههفته بنوینیت، گو‌رانی ژماره‌ی بینهره‌کانی بدۆزه‌وه له ئه‌نجامی پیشکه‌شکردنی ههفته‌یه‌کی زیاده‌دوای 10 ههفته له نمایشکردن، پاشان دوای 20 ههفته ئه‌و ئه‌نجامی پیگیه‌شتووی پروونیکه‌وه.

## روانین بو‌دواوه



26 له‌ویننه‌ی به‌رامبه‌ر شیوازیکی ئه‌ندازه‌یی ده‌رده‌که‌وینت.

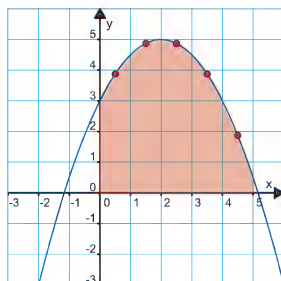
ا ژماره‌ی خاله‌کان له‌سی شیوه‌ی دوای ئه‌م شیوانه له‌و شیوازه بدۆزه‌وه.

ب ئه‌گه‌ر  $a_n$  ژماره‌ی خاله‌کانی شیوه‌ی پله  $n$  بیته له‌و شیوازه راده‌کانی یه‌که‌به‌دوای یه‌که‌که له  $n=1$  بو  $n=10$  بنوسه.

ج ئایا ده‌توانیت ئه‌م یه‌که‌به‌دوای یه‌که پۆلین بکه‌یت؟ به‌لگه‌ بو وه‌لامه‌که‌ت به‌هیننه‌وه.

د چه‌ند خال له‌شیوه‌ی پله 100 هه‌یه؟

## روانین بو‌پیشه‌وه



27 له‌ویننه‌ی به‌رامبه‌ر پروونکردنه‌وه‌ی نهخشه‌ی  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

و ئه‌و ناوچه‌ی ده‌که‌وینته‌ نیوان ته‌وه‌ری  $y$  و پاسته‌هیل  $x = 5$

له‌سه‌ره‌وه‌ی ته‌وه‌ری  $x$  و له‌ژیره‌وه‌ی پروونکردنه‌وه‌ی نهخشه‌که

ده‌رده‌که‌وینت. به‌های نزیک‌کراوه‌یی پرووبه‌ری ناوچه‌ی

ره‌نگ‌کراو ده‌دۆزیته‌وه.

ا ناوچه که بو 5 لاکیشه دابه شبکه، بنکه ی هه ریه کیکیان 1 یه که بیت، ژماره ی لاکیشه کان چهنده؟

ب دریزی هه لاکیشه یه ک بدۆزه وه، به هۆی هه ژمارکردنی به های نه خشه که له به های ئه و  $x$  ده که ویتته ناوه پاستی بنکه که ی. خسته که ته وایکه.

$x$	$f(x)$
0.5	
1.5	
2.5	
4.5	

ج سه رجه می پوویه رهکانی ئه و لاکیشه نه، به های نزیکراوهیی ناوچه پهنگراوه که پیکده هینیت. ئه و به هایه چهنده؟





## تەواوکارى Integration



### نامانچەكان

- تەواوکارى بى سىنور بۇ  
نەخشەك دەۋزىتەۋە.
- تەواوکارى سىنوردار  
ھەژماردەكات.
- تەواوکارى سىنوردار و  
تەواوکارى بى سىنور بۇ  
شېكارىدەنى پىسارەكان  
بەكاردەھىننىت.

### زاراۋىكان Vocabulary

- تەواوکارى بى سىنور  
Indefinite integral
- تەواوکارى سىنوردار  
Definite integral
- نەخشە بىنەرەت  
(دۇ داتاشراۋ)  
Antiderivative
- نەگۇرى تەواوکارى  
Constant of  
integration

بى گومان پىساكانى داتاشراۋ دەزانىت، لەوانە

- ئەگەر  $f(x) = k$  كاتىك  $k$  ژمارەيەكى نەگۇرە، ئەوا  $f'(x) = 0$ .
- ئەگەر  $f(x) = x^n$  كاتىك  $n \neq 0$  ژمارەيەكى نەگۇرە، ئەوا  $f'(x) = nx^{n-1}$ .
- ئەگەر  $f(x) = e^{kx}$  كاتىك  $k$  ژمارەيەكى نەگۇرە، ئەوا  $f'(x) = ke^{kx}$ .
- ئەگەر  $f(x) = \ln kx$  كاتىك  $k$  ژمارەيەكى نەگۇرە، ئەوا  $f'(x) = \frac{k}{x}$ .

پۇژىك پىسىۋتە، ئايا كىردارى داتاشراۋ كىردارى پىچەۋانەى ھەيە، واتا ئەگەر  $f(x)$  نەخشەك بىت، ئايا دەتوانىت نەخشەى  $F(x)$  بدۇزىتەۋەكە  $f(x)$  داتاشراۋەكەى بىت  $F'(x) = f(x)$  ؟ دەتوانىت بىر لەكارەكە بىكەيتەۋە و ھەۋلىدە پىچەۋانەى كىردارەكانى داتاشراۋ ئەنجام بەدەيت. بۇئەۋەى داتاشراۋى نەخشەى  $f(x) = x^n$  بدۇزىتەۋە، 1 لەتوانەكە  $n$  دەردەكەيت، و نەخشەكە لە تۋانە كۆنەكە دەدەيت و  $f'(x) = nx^{n-1}$  دەستدەكەۋىت. ئەگەر كىردارى پىچەۋانەى كىردارى داتاشراۋەكە جىبەجىبەكەيت، پىۋىستە 1 كۆبەيتەۋە لەگەل تۋانەكە، و نەخشەكە بەسەر تۋانى نوئ دابەشكەيت. و ھەروەھا.

- ئەگەر  $f(x) = 0$  كاتىك  $k$  ژمارەيەكى نەگۇرەيت، ئەوا  $F(x) = k$ .
- ئەگەر  $f(x) = nx^{n-1}$  كاتىك  $n \neq 0$  ژمارەيەكى نەگۇرەيت، ئەوا  $F(x) = x^n$ .
- ئەگەر  $f(x) = ke^{kx}$  كاتىك  $k$  ژمارەيەكى نەگۇرەيت، ئەوا  $F(x) = e^{kx}$ .
- ئەگەر  $f(x) = \frac{1}{x}$  ، ئەوا  $F(x) = \ln x$ .

بە نەخشەى ۋەك  $F(x)$  دەوترىت نەخشەى بىنەرەت بۇ نەخشەى  $f(x)$ .

بۇھەر نەخشەيەك  $f(x)$  ، نەخشەى  $F(x)$  بدۇزەۋەكە پاسادانى  $F'(x) = f(x)$  دەكات.

ج  $f(x) = 4e^{4x}$

ب  $f(x) = \frac{5}{x}$

ا  $f(x) = x^6$

### نمونە

## شیکار

$$F(x) = \frac{1}{7}x^7 \qquad F(x) = \frac{1}{6+1}x^{6+1} \quad \boxed{\text{c}}$$

$$F(x) = e^{4x} \quad \boxed{\text{ز}}$$

$$F(x) = 5 \ln x \quad \boxed{\text{ب}}$$

هه‌ولبده      بۆهر نه‌خشه‌یه‌کی  $f(x)$  ، نه‌خشه‌ی  $F(x)$  بدۆزوه، که پاسادانی  $F'(x) = f(x)$  ده‌کات.

$$f(x)=5e^{5x} \quad \boxed{\text{ج}} \qquad f(x)=\frac{3}{x} \quad \boxed{\text{ب}} \qquad f(x)=x^{11} \quad \boxed{\text{ا}}$$

کاتیڤ لهدا تاشراوی نه‌خشه‌یه‌ک ده‌گه‌پښت، نه‌خشه‌یه‌کی تاکانه (ته‌ن‌ها یه‌ک نه‌خشه) ده‌دو‌زیت‌ه‌ه، به‌لام کاره‌که جیاوازه کاتیڤ ده‌ته‌وږت نه‌خشه‌ی بنه‌رته بدو‌زیت‌ه‌ه، بۆ نمو‌ونه ئه‌گه‌ر  $f(x) = 3x^2$  بۆ نمو‌ونه، ئه‌وا نه‌خشه‌ی  $F(x) = x^3 + C$  نه‌خشه‌یه‌کی بنه‌رته بۆ نه‌خشه‌که، هه‌روه‌ها  $G(x) = x^3 + C$  نه‌خشه‌ی بنه‌رته بۆ نه‌خشه‌که کاتیڤ  $C$  ژماره‌یه‌کی راستی بږت، چو‌نکه:

$$G(x) = (x^3 + C)' = (x^3)' + (C)' = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x)$$

## تہواوکاری بیسنور

کرداری گه‌پان به‌دوای نه‌خشهی بنه‌په‌تی پئی ده‌وتریت ته‌واوکاری ئه‌وانه‌ی له‌بواری بیرکاری کارده‌که‌ن هیمایه‌کی تایبته‌ بو ته‌واوکاری به‌کارده‌هین، ئه‌ویش بریتیه‌له  $\int f(x)dx$  و نووسینی هیمایه‌ بو نه‌خشهی بنه‌په‌ت بو نه‌خشهی  $f(x)$  ئه‌گهر  $F(x)$  نه‌خشهی بنه‌په‌تی  $f(x)$  بیت، ئه‌وا

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

کاتیك C ژمارهیه کی راستییه پئی دهوتریت نه گوری ته واکاری.

## تہواوکاری بیسنوور

تەواۋىكارى بى سىنورى بۇ نەخشە  $f(x)$  بەشىۋە

$$\int f(x)dx \text{ دهنووسریت،}$$

واته تہ اوکاری بیسنور ہر نہ خشیہ کی بنہ رتییہ بوئم نہ خشیہ.

زانیت داتاشراو پړسای ههیه. و له بهر نه هوی ته و او کارۍ کرداری پیچه وانه ی داتاشراوه، له مه مهش پړسایه کانی ته و او کارۍ دهر ده چیت له مخشته یه ژماره یکه له پړسایه کانی داتاشراو و نه و پړسایانه ی ته و او کارۍ که لپی دهر ده چن دهر ده که ویت.

رېسايه کانی داتاشراو	رېسايه کانی تهواوکاری
$(k)' = 0$	$\int 0 dx = k$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$(e^{u(x)})' = u(x)e^{u(x)}$	$\int u'(x)e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C$
$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln u(x) + C$
$(kf(x))' = kf'(x)$	$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$	$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

## نمونې

تهواوکاری بې سنوور بدوږزه وه.

$$\int 4x^3 dx \quad \text{ا} \quad \int (5x^4 - 2x^3) dx \quad \text{ب} \quad \int \frac{3}{x} dx \quad \text{ج} \quad \int e^{-2x} dx \quad \text{د}$$

شیکار

$$\begin{aligned} \int 4x^3 dx &= 4 \int x^3 dx = 4 \left( \frac{1}{4} x^{3+1} \right) + C = x^4 + C \quad \text{ا} \\ \int (5x^4 - 2x^3) dx &= \int 5x^4 dx - \int 2x^3 dx = x^5 - 2 \left( \frac{1}{4} x^4 \right) + C = x^5 - \frac{1}{2} x^4 + C \quad \text{ب} \\ \int \frac{3}{x} dx &= 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln x + C \quad \text{ج} \\ \int e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} \int -2e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int (-2x)' e^{(-2x)} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C \quad \text{د} \end{aligned}$$

تهواوکاری بې سنوور بدوږزه وه. ههولېده

$$\int 3x^5 dx \quad \text{ا} \quad \int (2x^5 + 7x^6) dx \quad \text{ب} \quad \int \frac{5}{x} dx \quad \text{ج} \quad \int e^{3x} dx \quad \text{د}$$

به بیری خوت بهینه وه که پیاوړه په راویز کراوه کان له نابوریدا بریتیه له داتاشراوه کان. نه گهر نه خشه کی پیاوړه یی په راویز کراوت زانی، وهک تیچوونی په راویز بو بهرهمه پیاوړی کالایه ک بو نمونه ده توانیت نه خشه ی تیچوون بو بهرهمه پیاوړی نه و کالایه بدوږزته وه.

دوږزته وه ی نه خشه ی تیچوون

## نمونې

نه خشه ی تیچوونی په راویز بو بهرهمه پیاوړی کالایه ک بریتیه له  $C_m(Q) = 3Q^2 - 20Q + 36$  نه خشه ی تیچوونی بهرهمه پیاوړی نه و کالایه بدوږزه وه.

شیکار

$$\begin{aligned} \text{نه خشه ی تیچوونی نه و کالایه بریتیه له نه خشه ی بنه پرتی نه خشه ی تیچوونی په راویز.} \\ C(Q) &= \int C_m(Q) dQ \\ &= \int (3Q^2 - 20Q + 36) dQ \\ &= \int 3Q^2 dQ - \int 20Q dQ + \int 36 dQ \\ &= Q^3 - 10Q^2 + 36Q + k \end{aligned}$$

$K$  بریتیه له نه گورپی تهواوکاری و ده کاته نرخ ی تیچوون له  $Q = 0$ ، واته تیچوونی نه گورپی بهرهمه پیاوړی.

ههولبده نهخشه تىچوونى پەراويز بۆ بەرھەمھەناني كالا يەك بریتىيە لە:

$$C_m(Q) = 3Q^2 - 6Q + 5$$

نەخشە تىچوونى بەرھەمھەناني ئەو كالا يەك بدۆزەو، ئەگەر زانیت تىچوونى نەگۆرى بەرھەمھەنان بریتىيە لە 10 .

### تەواوكارى سنووردار

ئەوانەى لەبوارى بىركارى كاردەكەن بۆ ھەژماركردنى تەواوكارى سنووردار تەواوكارى بۆسنوور بەكاردەھيەن.

### تەواوكارى سنووردار

تەواوكارى سنووردار بۆ نەخشەى  $f(x)$  لەنۆوان  $a$  و  $b$  بریتىيە لە

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

كاتىك  $F(x)$  ھىمايە بۆ نەخشەى بنەپەتى نەخشەى  $f(x)$  .

تەيىنەىكە ھەلبژاردنى نەخشەى بنەپەتى  $F(x)$  بۆ نەخشەى  $f(x)$  كار ناكاتە سەر بەھاي تەواوكارى سنووردار. ئەگەر  $G(x) = F(x) + C$  نەخشەىكى بنەپەتى تر بوو بۆ  $f(x)$  ئەوا:

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

### دۆزىنەوہى تەواوكارى سنووردار

ئەم تەواوكارىيە سنووردارنە بدۆزەو.

$$\int_0^1 2e^x dx \quad \boxed{\text{د}} \quad \int_1^2 \frac{3}{x} dx \quad \boxed{\text{ج}} \quad \int_0^3 (x^2 - 3x + 4) dx \quad \boxed{\text{ب}} \quad \int_1^5 2x dx \quad \boxed{\text{ا}}$$

شىكار

$$\int_1^5 2x dx = [x^2]_1^5 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24 \quad \boxed{\text{ا}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^2 - 3x + 4) dx &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_0^3 \\ &= \left[ \frac{1}{3}3^3 - \frac{3}{2}3^2 + 4 \times 3 \right] - \left[ \frac{1}{3}0^3 - \frac{3}{2}0^2 + 4 \times 0 \right] \end{aligned}$$

$$= 9 - \frac{27}{2} + 12 \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$= 9 - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{15}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{3}{x} dx = [3 \ln x]_1^2 = 3[\ln 2 - \ln 1] = 3(\ln 2 - 0) = 3 \ln 2 \quad \boxed{\text{ج}}$$

$$\int_0^1 2e^x dx = 2 \int_0^1 e^x dx = 2[e^x]_0^1 = 2(e^1 - e^0) = 2(e - 1) \quad \boxed{\text{د}}$$



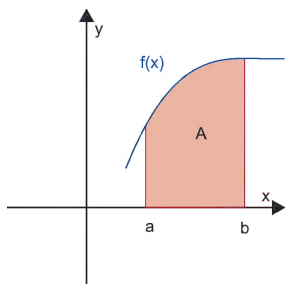
ا  $\int_0^3 3x^2 dx$

ب  $\int_1^2 (3x^2 + 5x - 4) dx$

ج  $\int_1^2 \frac{-2}{x} dx$

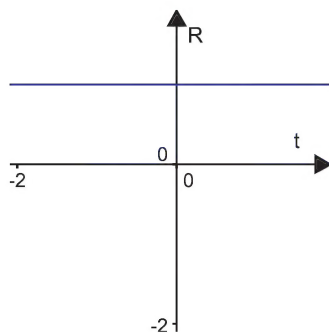
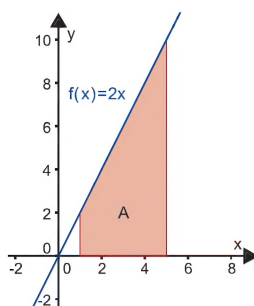
د  $\int_1^2 -3e^x dx$

## هەژمارکردنى رۆبەر



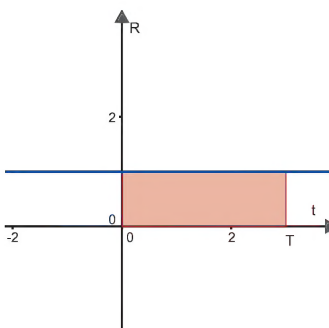
ئەوانەى لەبوارى بىرکاری کاردەکن ئەمەیان سەلماندوو: ئەگەر  $f(x) \geq 0$  بەهای  $x$  هەرچەندىك بىت لەنۆان  $a$  و  $b$ ، ئەوا تەواوکاری سنوورداری  $\int_a^b f(x) dx$  دەکاتە رۆبەرى ئەو ناوچەى سنووردراو لەژێرەو بەتەوهرى  $x$  و لەسەرەو بەرپونکردنەوهرى نەخشەى  $f(x)$  و لەلای راست و لای چەپ بەدوو راستەهێلى  $x=a$  و  $x=b$ .

ئەگەر بگەرێینەو بۆ نمونەى  $\int_1^5 2x dx$  ئەوا ئەو تەواوکارىيە سنووردراو دەکاتە رۆبەرى نیمچەلاتەریبە رەنگ کراو.



هەندىك گۆراوى ئابوورى وەك دەستكەوت (داهات)، بەگۆرانى كات دەگۆرێت وادابنێ داهاتى دەزگایەك دیاریدەكرێت بەتێكراپیهكى نەگۆر بركەكى هەزار ملیۆن دینارە لەسالىكدا. دەتوانیت نەخشەى داهاتى پەراوێز وەك نەخشەیهك بەپێى كات (بەسال) بنووسیت وەك:

$$R_m(t) = 1000$$



رۆونکردنەوهرى ئەو نەخشەیه راستەهێلىكى ئاسۆییه. سەرجهمى دەستكەوتووكان لەنۆان سالى  $t=0$  و  $t=T$  چەندە؟ دەكاتە  $1000T$  ملیۆن دینار. دەتوانرێت ئەو سەرجهمە بەناوچەى رەنگراو لەوینەى رۆونکردنەوهرى بەرامبەر بنوینرێت.

ههروهه دهتوانیت بهپیی پئشو پروونیکهینهوه که تهواوکاری سنوورداری نهخشهی  $R(t) = 1000$  لهنیوان  $t = 0$  و  $t = T$ ، واتا

$$\int_0^T 1000 dt = [1000t]_0^T = 1000T$$

لهوانهیه تیكپای داهات نهگۆر نهبی، و لهوانهیه بهپیی کات بگۆریت، بهمهش دهمانگهیهنیته نهخشهی داهاتی پهراویزی جیاواز له نهخشهی نهگۆر. بهلام سهرحهمی داهاتهکان لهنیوان دوو ماوهی  $t = a$  و  $t = b$  لهکات دهمینیتیهوه تهواوکاری سنووردار لهنیوان  $a$  و  $b$  دا بو نهخشهی داهاتی پهراویز.

نخشهی  $R_m(Q) = 16200 - 2Q$  نهخشهی دهستکهوتی پهراویزی دهزگایهک دهوینیت. دهستکهوتی دهزگاکه لهئهنجای فروشتنی 1200 یهکه بدۆزهوه.

### شیکار

داهات لهئهنجای فروشتنی 1200 یهکه بریتییه له

$$\int_0^{1200} RM(Q) dx$$

ئهو تهواوکارییه سنوورداره ههژماربکه.

$$\begin{aligned} \int_0^{1200} R_m(Q) dQ &= \int_0^{1200} (16200 - 2Q) dx \\ &= [16200Q - Q^2]_0^{1200} \\ &= 18000000 \end{aligned}$$

ههولبد ههخشهی تیچوونی پهراویز بو دهزگایهک بریتییه له  $C_m(Q) = 3Q^2 - 16Q + 12$  تیچوونی بهرهمهینانی 600 یهکه بدۆزهوه.

## راهیان

### بهردهوامبوون له بیر کاریدا

- 1 پهیوهندی نیوان داتاشراو و تهواوکاری پروونیکهوه.
- 2 جیاوازییهکان نیوان تهواوکاری سنووردار و تهواوکاری بی سنوور پروونیکهوه.
- 3 تهواوکاری سنوورداری  $\int_1^3 x dx$  ئەندازهییانه چی دهگهینیت؟

### راهینانی ئاراسته کراو

ههه تهواوکارییهکی بی سنوور بدۆزهوه.

$$\int (3x^2 - 2x) dx$$

5

$$\int 4x^3 dx$$

4

$$\int e^{2x} dx$$

7

$$\int x^{-2} dx$$

6

ئەم تەواكارىيە سنووردانە بدۆزەو.

$$\int_1^2 x^{-2} dx \quad 9$$

$$\int_1^3 4x^3 dx \quad 8$$

10 نەخشە قازانجى دەزگايەك بدۆزەو ئەگەر زانیت نەخشە داھاتى پەراوئىز برىتییە لە  $R_m(Q) = 22 - 2Q$  و نەخشە تیچوونی پەراوئىز برىتییە لە  $C_m(Q) = 2Q^2 - 6Q + 6$  و تیاچوونىكى نەگۆر بۆ بەرھەمھێنان نییە.

## راھێنان و جێبەجێکردن

ئەم تەواكارىيە بى سنوورانە بدۆزەو.

$$\int (e^{ax} - 1) dx \quad 12$$

$$\int (x^{-1} + x) dx \quad 11$$

$$\int e^{kx} dx \quad 14$$

$$\int \left( e^{-x} + \frac{4}{x^2} \right) dx \quad 13$$

ئەم تەواكارىيە سنووردانە بدۆزەو.

$$\int_{-1}^1 (2x + e^{-x}) dx \quad 16$$

$$\int_1^4 -2x^2 dx \quad 15$$

17 نەخشە تیچوونی پەراوئىز برىتییە لە  $C_m(Q) = 3Q^2 - 28Q + 84$  نەخشە تیچوون بدۆزەو ئەگەر زانیت تیچوونی نەگۆر برىتییە لە 92.

18 نەخشە داھاتى پەراوئىز برىتییە لە  $C_m(Q) = 120 - 8Q$  نەخشە داھات بدۆزەو (تیببىنى بکە داھات دەکاتە 0 لە  $Q = 0$ ).

19 نەخشە پاشەکەوتى پەراوئىز بۆ خێزانیک برىتییە لە  $f(R) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{R}}$  ، که داھات دەنوئینت. نەخشە پاشەکەوتى ئەو خێزانە  $F(R)$  بدۆزەو، ئەگەر زانیت که پاشەکەوتەکە دەکاتە 20 کاتیک داھات دەکاتە 100.

20 نەخشە داھاتى پەراوئىزى دەزگايەك دەکاتە  $R_m(Q) = 84 - 4Q$  نەخشە داھاتى ئەو دەزگايە بدۆزەو، ئەگەر زانیت داھاتەکە دەکاتە 0 لە  $Q = 0$ .

21 نەخشە بەکاربردانى پەراوئىزى خێزانیک برىتییە لە  $f(R) = 0.5 + \frac{2}{\sqrt{R}}$  ، که داھات دەنوئینت. نەخشە بەکاربردانى ئەو خێزانە  $F(R)$  بدۆزەو، ئەگەر زانیت که بەکاربردن دەکاتە 25 کاتیک داھات دەکاتە 25.

22 نەخشە داھاتى پەراوئىزى برىتییە لە  $R_m(Q) = 34 - 3Q$  و نەخشە تیچوونی پەراوئىزى برىتییە لە  $C_m(Q) = Q^2 - 10Q + 26$  و تیچوونی نەگۆر بەرھەمھێنان نییە.

ا نەخشە قازانجى ئەو دەزگايە بدۆزەو.

ب هێندى  $Q$  چەندە که بەرزترین ئاستى لەتوانای قازانج بۆ دەزگاکە دەستەبەر دەکات.

23 نەخشەى پەراوئىز بۇ بەرھەمھېئنانى كارگەيەك برىتتيپە لە  $P(t) = Ae^{0.6t}$  ئەو ھېندەى كارگەكە بەرھەمى دەينىت. لەنئوان ماوەى  $t = 0$  و ماوەى  $t = 1$  بدۆزەو، پاشان لە ماوەى نئوان  $t = 1$  و ماوەى  $t = 2$  رېژەى زيادەى بەرھەمھېئنان لەماوەى دووہم بۇ ماوەى يەكەم بدۆزەو؟

## روانين بۆدواوہ

24 نەخشەى داھاتى بۇ دەزگايەك برىتتيپە لە  $R(Q) = 1400Q - 6Q^2$  و نەخشەى تىچوونى  $C(Q) = 1500 + 80Q$ . ھېندى  $Q$  بدۆزەو كە بۇ دەزگايەكە گەرەتريىن قازانچ دەستەبەر دەكات.

25 نەخشەى داھاتى بۇ دەزگايەكە وەك خۆى مايەو، واتا  $R(Q) = 1400 - 6Q^2$  و نەخشەى تىچوون گۇرا بۇ ئەوەى بېيتە  $C(Q) = 3000 + 80Q$ .

ا ھېندى  $Q$  بدۆزەو كە بەرزتريىن قازانچ لەتوانا دايە بۇ دەزگايەكە دەستەبەر دەكات.

ب ئايا وەلامەكەت جياوازە لەوەلامى پرسىارى 25 ؟ ئەمە پروونبەو.

## روانين بۆپيشەوہ

26 پروونبەو كە ئەو ھېندەى كە بەرزتريىن قازانچ لەتوانا دايە دەستەبەر دەكات برىتتيپە لەو ھېندەى كە داھاتى پەراوئىز يەكسان دەبىت بەتىچوونى پەراوئىز.